群と表現

江沢　洋
島　和久　著

岩波書店

まえがき

本書は，群とその表現の数学的構造を現代的な視点から平明に解説したものである．群とその表現は，近年，物理学や工学に広く応用されているが，それらを使いこなす上に数学的構造の理解は大きな見とおしをあたえる．

第1章では群を定義し，その構造を記述する概念を導入する．いま，一つの対象に対する操作の集合Gで，Gの元 x をまず行ない続けて y を行なったとき(yx で表わす)その結果がまた一つの元 z としてGに含まれているという意味で閉じた体系をなすものを考える．Gにはなおいくつかの条件がつくが，関係 $yx=z$ のみを抽象し(対象が何であったかは捨象して)Gを群とよぶ．

群Gの二つの元 x, y は，もしGのなかに適当な元 a があって $y=axa^{-1}$ と書けるなら x と y を同じ仲間(同値類)とみなすことにして，Gを仲間分けすることができる．x と y が同じ仲間で y と z が同じ仲間なら x と z も同じ仲間になることが証明されるからである．こうしてつくった仲間を共役類というが，これが群の数学的構造の一例である．群の仲間分けの仕方は他にもある．

群Gの各元に，それらの積の関係 $yx=z$ を保存するように，それぞれ行列を対応させたとき，この対応がGの表現である．

群Gの元の数が有限のとき，有限群という．第2章では，その表現をつくる．群の表現行列は，適当な基底の変換によって小さい正方行列が対角線上に並んだ形に変えられることがあり，これは表現の簡約といわれる．もうそれ以上に小さな正方行列にはできないとき既約表現という．この簡約に際して第1章に述べた群の共役類も一役かうのである．この章で導入する表現の指標も大きな助けになる．群の表現の簡約は，力学系の振動の扱いや量子力学における原子・分子のエネルギー準位の分類，摂動計算の簡略化に大きな役割をはたす．

第3章でいう位相構造は2点の近さを測り空間の繋がり具合を表わす．これを学ぶのは，第4章で連続群を扱う準備である．この第4章は n 次正則行列のなす群(一般線形群)から出発する．その部分群は，それぞれが不変にする双一

次形式およびエルミート形式の分類に応じて種々の古典線形群となり，それぞれが位相空間をなし連続であることがわかる．すなわち連続群である．

第5章の線形 Lie 群というのは，一般線形群の閉部分群のことで，その典型例は回転群，ユニタリ群，Lorentz 群などである．群をパラメタ表示したとき，原点における微係数の全体が Lie 代数をなす．その例としては，量子力学における座標と運動量や角運動量の演算子があるが，逆に Lie 代数が与えられたとき，その親にあたる Lie 群はどこまで定まるかが，この章の主要な問題である．第6章は連続群の表現で，不変積分(Haar 測度)を導入し，これを用いて有限群の諸性質を読み替える．ここでも Lie 代数の表現から Lie 群の表現を構成することが問題になる．

次の第7章では Lie 代数にイデアルを定義し，これによって半単純，単純 Lie 代数の概念を立て，次にルートとウェイトの概念を導入していわゆる複素単純 Lie 代数を分類し，それぞれの型について既約表現を構成する．話は，やや大がかりになるが，クォークの結合状態の分類には必須である．

本書には例題を多く入れたが，群論の考え方の例示を主としたので，群論の多彩な応用は演習問題として提示することになった．中には問題設定に始まる道案内つきの演習もある．これらの問題には比較的ていねいな解答をつけた．工学における応用が欠けたのは著者たちの非力のせいである．

なお，本文中に $[n]$ とあるのは巻末の参考書の番号である．演習問題 $n.m$ は第 n 章の章末問題の第 m 番を指している．索引については，内容を主にしたので，参照ページに項目どおりの言葉で現れるとはかぎらない．

本書は，もとは「岩波講座 応用数学」の一冊だったもので，島が基本概念と理論構造の平明な提示を目標に第一稿を書き，江沢が例題や演習問題を追加しながら仕上げた．こんど単行本とするにあたって補筆訂正をし，付録に基本群の簡単な説明を補い，演習問題の一部を改め，さらに巻末の参考書をさしかえた．本書が，群論の物理学や工学への応用を現代的な視点からしっかり学ぼうとする皆さんのお役に立てば幸いである．

お世話になった岩波書店編集部の吉田宇一さん，加美山亮さんに厚く御礼を申し上げる．

2009年5月 江沢 洋，島 和久

目次

第1章

群の構造

対象 A が操作 σ_1 を施しても不変なとき，σ_1 は A の対称操作であるという．σ_1 を 2 回施すのも，3 回施すのも対称操作である．A が，σ_1 の繰り返しとは異なる対称操作 σ_2 をもつなら，σ_1 を施して次に σ_2 を施すなど対称操作の種類が急に増える．

対象が多くの対称操作をもつとき，その全体を秩序だてて捉えようとするのが群論である．見いだした秩序を数式で表現すると，物理や工学における対称性の効用が大いに高まる．しかし，その研究は第 2 章以後のことにして，まずは対象操作の集合に秩序を見いだすための視点を築こう．

§1.1 群とは何か

定義 1.1 集合 G は，G の任意の二つの元 x, y に対して G の元を対応させる，次の性質をもつ演算 $x \cdot y$ が備わっているとき，**群** (group) という．

(i) 結合律　$\forall x, y, z \in \mathrm{G}$ に対して $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(ii) 単位元の存在　ある元 $e \in \mathrm{G}$ が存在して $\forall x \in \mathrm{G}$ に対して $x \cdot e = e \cdot x = x$

(iii) 逆元の存在　各 $x \in \mathrm{G}$ に対して $x' \in \mathrm{G}$ が存在して $x' \cdot x = x \cdot x' = e$

このような e を G の**単位元** (unit) といい，x' を x の**逆元** (inverse) という．□

単位元は一つに限る．もし，もう一つの単位元 e' があったら $e' \cdot e = e', e' \cdot e = e$ となり $e' = e$．逆元も一意にきまる．実際，$x \in \mathrm{G}$ に対し逆元 x', x'' があれば $x'' = x'' \cdot (x \cdot x')$ だが，これは結合律から $(x'' \cdot x) \cdot x' = x'$ に等しい．今後は演

算を表わす $\cdot$ は省略し，x の逆元を x^{-1} と記す．群 G の演算が，さらに

(iv) 交換律 $\forall x, y \in \mathsf{G}$ に対して $x \cdot y = y \cdot x$

をみたすなら，G を**可換群** (commutative group) または Abel 群 (Abelian group) という．その演算は + で表わし，単位元は 0 で，x の逆元は $-x$ で表わすことも多い．交換律をみたさない群は**非可換群** (noncommutative group) という．

注意 群の公理の (ii), (iii) は次のようにしてもよい：

(ii′) $e \in \mathsf{G}$ が存在して $\forall x \in \mathsf{G}$ に対して $xe = x$

(iii′) $\forall x \in \mathsf{G}$ に対して $x' \in \mathsf{G}$ が存在して $xx' = e$

e を G の右単位元といい，x' を x の右逆元という．左単位元，左逆元も同様にして導入されるが，(ii′), (iii′) と結合律から左右の単位元，逆元の一致が示される (演習問題 1.4)．

群 G の元の個数が有限なら G を有限群といい，有限でないなら無限群という．有限群の元の個数を，その群の**位数** (order) といい $|\mathsf{G}|$ で表わす．

例 1.1 加法群 Z, R 整数全体の集合 Z，および実数全体の集合 R は加法を結合則として群をなす．これらは可換な無限群である． □

例 1.2 四元群 集合 $\mathrm{V} = \{e, a, b, c\}$ に次のように積を定めて得られる可換群：

$$aa = bb = cc = e, \quad ab = ba = c, \quad bc = cb = a, \quad ca = ac = b.$$

これを四元群 (four-group，独：Vierergruppe) という． □

例 1.3 複素数 C を要素とする n 次正方行列の全体を $\mathsf{M}(n,\mathsf{C})$ とすれば，集合

$$\mathrm{GL}(n, \mathsf{C}) = \{X \in \mathsf{M}(n, \mathsf{C}) | \det X \neq 0\}$$

は行列の積の演算で群をなす．これを n 次**一般線形群**という．行列要素を実数 R に限った GL(n, R) も群をなす．今後，C でも R でもよいとき K と書く． □

例 1.4 集合 $\mathsf{X}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ の元を $1 \to \sigma(1), 2 \to \sigma(2), \cdots, n \to \sigma(n)$ とする**置換** (permutation) を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

と書く．X_nの置換の全体は群をなすので n 次の**置換群** (permutation group)，あるいは**対称群** (symmetric group) という．これは $n!$ 位の非可換群である． □

例 1.5　図 1.1 の立方体は x 軸のまわりに正の (右ネジが x 軸の正の向きに進むような) 向きに $\pi/2$ 回転しても変わらない．この操作を a_x とし，これを n 回くりかえす操作を a_x^n と書けば

$$\mathrm{C}_4 = \{e, a_x, a_x^2, a_x^3\} \qquad (a_x^4 = e)$$

は群をなす．e は単位元で，何もしないことを表わす．$a_x^4 = e$ だから $a_x^{-1} = a_x^3 (\in \mathrm{C}_4)$ などとなる．一般に，対象 A を不変にする操作を A の**対称操作** (symmetry operation) という．C_4 は図 1.1 の立方体の対称操作の群である．　□

C_4 のように，一つの元 a の (正負の) ベキからなる群を**巡回群** (cyclic group) とよび，その元 a を**生成元** (generator) という．群 C_4 の場合，a_4 はもちろん生成元であるが，a_x^3 もそうである．実際，$a_x^4 = e$ を考慮すれば $(a_x^3)^2 = a_x^2$, $(a_x^3)^3 = a_x$

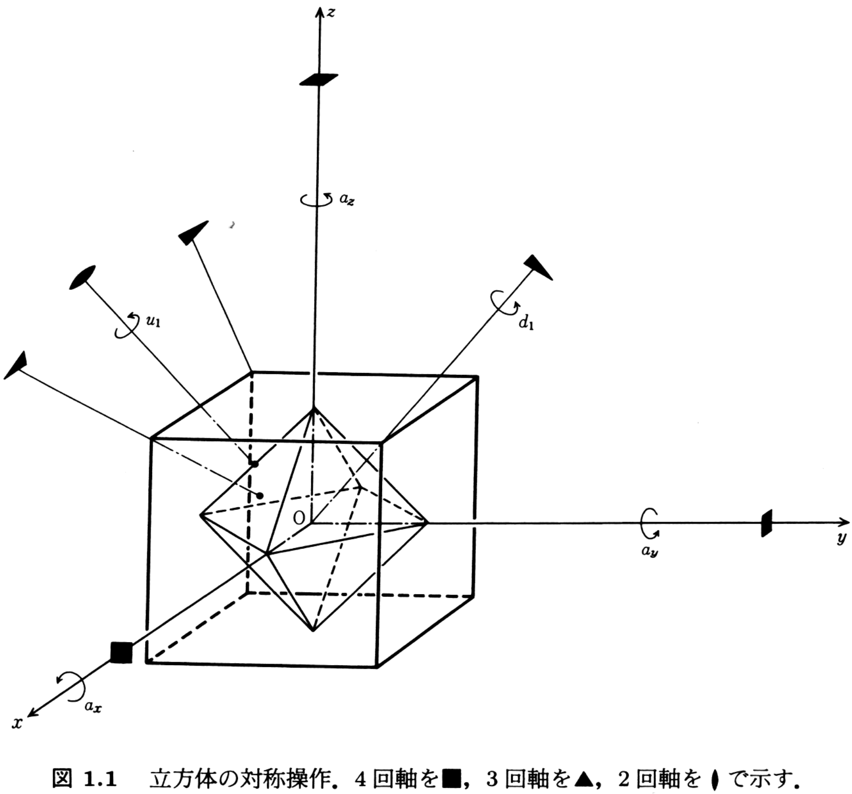


図 1.1　立方体の対称操作．4 回軸を■，3 回軸を▲，2 回軸を ⬮ で示す．

となる．群の生成元は必ずしも一意にはきまらないのである．生成元 a が $a^n = e$ となる 0 以外の整数 n をもたない場合には $\{\cdots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \cdots\} = \mathrm{C}_\infty$ が位数 ∞ の巡回群になる．

例 1.6 図 1.1 の立方体は，y 軸まわりの $\pi/2$ の回転 a_y も対称操作としてもつ．z 軸まわりの a_z も対称操作である．したがって，a_x, a_y, a_z の勝手な順序の勝手な個数の積の全体からなる群 O も立方体の対称操作の群になる．こういうと，O の位数は無限大だと思われるかもしれないが，実は 24 である．なぜなら，それらの操作で立方体をいくら回転しても 24 通りの向きしかとらないから．

回転をしてみると分かるように $a_z = a_y^{-1} a_x a_y$ なので，群 O の生成元は a_x, a_y の二つである．これらの関係は，$a_z = a_x a_y^{-1} a_x^{-1}$ でもあることに注意して $a_y^{-1} a_x a_y = a_x^{-1} a_y a_x$，すなわち $a_x a_y = a_y a_x (a_y^{-1} a_x)$．これが a_x と a_y の非可換性をきめている．群 O は，したがって，この関係と $a_x^4 = a_y^4 = e$ をみたす a_x, a_y から生成されるということができる．生成元を $\mathrm{O} = \langle a_x, a_y \rangle$ と書く．

別の特徴づけもできる．x 軸まわりの回転を 4 回くりかえすと立方体は元の向きに戻るので，この軸を 4 回軸 (4-fold axis) という．同様の表現で，立方体には 4 回軸が 3 本，3 回軸が 4 本，2 回軸が 6 本ある (図 1.1)．各 3 回軸のまわりの $2\pi/3$ の回転を $d_1, \cdots, d_4$，各 2 回軸のまわりの π の回転を $u_1, \cdots, u_6$ とすれば，群 O は

$$\mathrm{O} = \{e, a_x, a_x^2, a_x^3, \cdots, a_z, a_z^2, a_z^3, d_1, d_1^2, \cdots, d_4, d_4^2, u_1, \cdots, u_6\}$$

であるともいえる．元が正しく 24 個あることを確かめよ．ここに

$$a_z = a_y^{-1} a_x a_y, \quad d_1 = a_x a_y, \quad u_1 = a_x a_z^2, \cdots,$$
$$d_3 = a_x^{-1} d_1 a_x, \quad u_3 = a_y^{-1} u_1 a_y, \cdots$$

の関係がある (記号は図 1.1)．群 O は，また正八面体を不変にし**正八面体群** (octahedral group) とよばれる．□

直角座標系において xy 面を両面鏡とすれば，点 (x, y, z) の像は $(x, y, -z)$ にできる．この写像を xy 面に関する**鏡映** (reflection) という．

例 1.7 水の分子 $\mathrm{H_2O}$ は，図 1.2 のように座標系をとれば，z 軸のまわりの π の回転 C_2，yz 面に関する鏡映 σ_v，xz 平面に関する鏡映 σ'_v で不変である．これら三つの操作に単位元を加えてできる群を $\mathrm{C_{2v}}$ とよぶ．これは可換群で

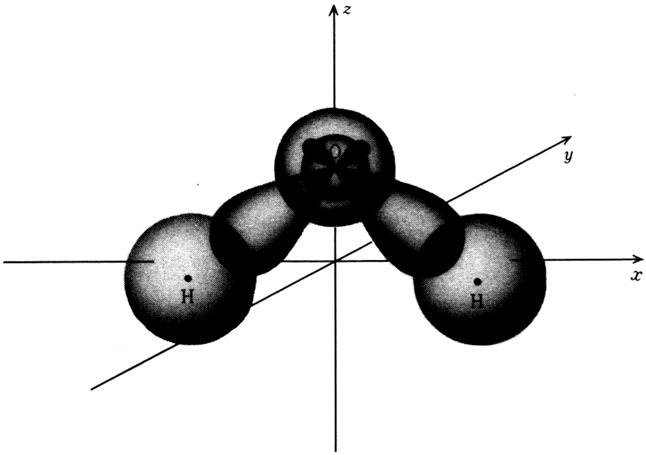


図 1.2 水の分子 H_2O．原子核と電子雲を示す．酸素原子から y 方向に延びる電子雲もあるが，省略した．OH=9.57×10^{-11}m, ∠HOH=104.45°.

$$\sigma_{\mathrm{v}}C_2 = \sigma'_{\mathrm{v}}, \quad \sigma'_{\mathrm{v}}C_2 = \sigma_{\mathrm{v}}, \quad \sigma_{\mathrm{v}}\sigma'_{\mathrm{v}} = C_2, \quad \cdots$$

の関係がある．鏡映を重ねると回転になることに注意．

これらの操作は，原子に裏表があったり向きがあったりしたら水分子を不変にするとはいえない．しかし，分子の振動など，とりあげる問題の物理によっては原子を質点とみてよい．そういう場合には，原子の内部構造まで立ち入らずに分子の対称性を考えるのである． □

σ の添字 v は vertical からきている．(主たる) 回転軸に垂直な面に関する鏡映は horizontal の h を添字にして σ_{h} とよぶ．正八面体群 O にも適当な面に関する鏡映を加えて群を拡大し，なお立方体の対称操作の群であるようにすることができる．

例 1.8 量子力学では，粒子の運動量は波動関数 $\psi(x)$ に作用する微分演算子 $\hat{p} = -\mathrm{i}\hbar\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ で表わされる．演算子の指数関数を級数展開

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{p}a/\hbar} = 1 + \frac{(-a)}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{(-a)^2}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \cdots + \frac{(-a)^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + \cdots \quad (a \in \mathsf{R})$$

によって定義し，これを $\hat{\tau}_a$ とおけば

$$\mathrm{T}(\mathsf{R}) = \{\hat{\tau}_a | a \in \mathsf{R}\}$$

は，演算子の積[*1] によって群をなす．実際，Taylor 展開の公式により

$$\hat{\tau}_a \psi(x) = \psi(x-a) \tag{1.1}$$

となるから

$$\hat{\tau}_a \hat{\tau}_b = \hat{\tau}_{a+b}$$

が成り立つ．単位元は $\hat{\tau}_0$ であり，$\hat{\tau}_a$ の逆元は $\hat{\tau}_{-a}$ である．(1.1) から，$\hat{\tau}_a$ の作用は波動関数を a だけ平行移動させることだから T(R) は**並進群** (translation group) とよばれる．(1.1) は，また波動は動かさずに座標系を $-a$ だけ平行移動した結果とも見られる．前者を群の作用の**能動的解釈** (active interpretation)，後者を**受動的解釈** (passive interpretation) という． □

群論を応用する上で，これら二つの見方はそれぞれ重要である．物理法則に従う一つの運動形態があるとき，その座標による記述は座標系を変換すれば変わるだろうが，対象は変換前と同じ運動をしているのだから新しい記述も物理法則をみたすことに変わりはないはずである．特に，物理法則がその座標変換で不変ならば，運動の記述も座標変換で変わらないだろう．いや，一般には，そこまでは言えない．古典量子論でパラドクスとされた方向量子化が，量子力学にきて重ね合わせの原理で解決されたことを思い出そう．

量子力学をひきあいに出すまでもない．たとえば，対称性のよい形にバネでつながれた質点系が固有振動しているとしよう．図 1.2 の水分子の振動も，この一つの例として見ることができる．水分子 H_2O の振動には OH の距離の伸縮や $\angle$HOH の増減など，いろいろの形態が考えられる．その形態によって固有振動数もちがうだろうか．いま，この分子が定まった振動数で振動しているとしよう．座標変換が時間を含まないなら，新しい座標系で見ても系は前と同じ振動数の振動をする．もし，振動の形態がちがえば固有振動数もちがうのだったら，振動の形態も座標変換で変わらないことになる．しかし，実際には，これほど簡単ではない．その座標変換で系の形の記述が変わらないなら，運動方程式の形も変わらない．一般に，前と同じ固有振動数の解，すなわち振動形態 (mode) はそうたくさんはない．座標変換したとき，それらは移り合うか重ね合わせになるかしかない．そうだとすれば，これは，固有振動の形態が系の対称

*1　演算子 A, B の積 AB とは B を演算し，つづけて A を演算することと定義する．波動関数 ψ に作用するいまの例では: $(AB)\psi = A(B\psi)$.

性で制限されることを意味する．このように問題が限定されることを利用して振動形態が簡単にきめられることになればありがたい．固有振動の形態を求めるのにハミルトニアンを対角化する計算は煩雑だからである．

他方，座標系は動かさずに対象を動かす能動的な見方は，座標系の方を動かす受動的な見方よりずっと直観的である．二つの見方が同等なのは物理現象の舞台である空間の等方性によるが，同等ならわかりやすい方を使えばよい．

上に述べたのは一例にすぎない．考えの進め方としては典型に属すると言いたいところだが，まだ群という言葉すらでていない．われわれは，まず群の性質を調べることから始めよう．

§1.2 部分群，剰余類，共役類

定義 1.2 群 G の部分集合 H が G の演算によって群をなすなら，H を G の**部分群** (subgroup) という． □

H ⊂ G が部分群であるためには，2 条件

(i) $x, y \in \mathsf{H} \implies xy \in \mathsf{H}$

(ii) $x \in \mathsf{H} \implies x^{-1}$(G での逆元) $\in \mathsf{H}$.

のみたされることが必要十分である．この条件は，もっと簡潔に言い表わせる．

定理 1.1 群 G の部分集合 H が部分群であるための必要十分条件は

$$x, y \in \mathsf{H} \implies xy^{-1} \in \mathsf{H}.$$

［証明］ 必要なことは明らか．十分なこと：まず $x = y$ とすれば $xx^{-1} = e \in \mathsf{H}$ となるから $x = e$ として $ey^{-1} \in \mathsf{H}$ が得られ条件 (ii) が確かめられる．そこで y の代わりに y^{-1} をとることができて $x(y^{-1})^{-1} \in \mathsf{H}$ から (i) も得られる． ∎

一般に，群 G の部分集合 A, B に対し

$$\mathsf{AB} = \{xy | x \in \mathsf{A}, y \in \mathsf{B}\}, \quad \mathsf{A}^{-1} = \{x^{-1} | x \in \mathsf{A}\} \tag{1.2}$$

を定義すれば，定理 1.1 の条件は $\mathsf{HH}^{-1} \subset \mathsf{H}$ と書ける．実は，等号が成り立つ：

$$\mathsf{HH} = \mathsf{H}, \quad \mathsf{H}^{-1} = \mathsf{H}, \quad \mathsf{HH}^{-1} = \mathsf{H}.$$

対称群 S_n の元のうち i, j の取り替えを**互換** (transposition) といい，(i, j) と書く．S_n のどの置換も有限個の互換の積で表わされる．その表わし方は一意ではないが，個数の偶奇は表わし方によらないので，置換は偶置換と奇置換に分

類される．S_nの偶置換の個数は奇置換の個数に等しい．

例 1.9 対称群S_nの中で偶置換の全体は部分群をなす．これを**交代群** (alternating group) A_nという．その位数は$n!/2$である．□

例 1.10 **特殊線形群** (special linear group) または**単模群** (unimodular group):

$$\mathrm{SL}(n,\mathsf{C}) = \{X \in \mathsf{M}(n,\mathsf{C}) | \det X = 1\}$$

これは例 1.3 の一般線形群 $\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$ の部分群である．□

例 1.11 **ユニタリ群** (unitary group) $\mathrm{U}(n)$ と**直交群** (orthogonal group) $\mathrm{O}(n)$:

$$\mathrm{U}(n) = \{X \in \mathsf{M}(n,\mathsf{C}) | X^{\dagger}X = I_n\}, \quad \mathrm{O}(n) = \{X \in \mathsf{M}(n,\mathsf{R}) | X^{\mathrm{t}}X = I_n\}.$$

これらも $\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$ の部分群であるが*2，さらに行列を$\det X = 1$のものに限れば，それぞれ $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$ となる．後者が**回転群** (rotation group) である．□

S を群 G の部分集合とする．S を含む G の部分群すべての共通部分は群をなし，S で**生成される**部分群 $\langle \mathsf{S} \rangle$ とよばれる．これは具体的に

$$\langle \mathsf{S} \rangle = \{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k} \mid k \in \mathsf{N},\ a_{i_l} \in \mathsf{S} \cup \mathsf{S}^{-1}\ (l = 1,\cdots,k)\}$$

と書ける．なぜなら：右辺を H とすれば，(1) $\mathsf{S} \subset \mathsf{H}$ は $k = 1$ の元を見れば明らか，(2) S を含む G の任意の部分群を K とすれば $a_{i_1}\cdots a_{i_k} \in \mathsf{K}$ だから $\mathsf{H} \subset \mathsf{K}$ だし，(3) H が部分群をなすことは定理 1.1 により確かめられる．

例 1.12 巡回群 C_pはpの素因数分解に応じて種々の部分群をもつ．□

定義 1.3 群 G の元で他のどの元とも可換なものの全体を G の**中心** (center) といい，Z(G) と記す．□

例 1.13 $\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$ の中心は，単位行列の定数 ($\neq 0$) 倍の全体である．それは，$y \in \mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$ として $y_{ij} = \delta_{ij} + \delta_{ik}\delta_{jl}$ $(1 \leqq k,l \leqq n,\ k \neq l)$ を (i,j) 要素とする，k,l ごとに定まる行列との可換性を調べればわかる*3．□

与えられた群 G の元を同値関係によって分類することを考える．同値関係 (equivalence relation) とは，次の 3 条件をみたす 2 項関係 $\sim$ をいう：

反射律　$x \sim x$

対称律　$x \sim y \implies y \sim x$

推移律　$x \sim y,\ y \sim z \implies x \sim z$

定義 1.4 集合 S の部分集合 E は，同値関係 $\sim$ に関し次の 2 条件

---

*2　I_nはn次の単位行列を表わす．また，†は Hermite 共役を，$^{\mathrm{t}}$は転置を表わす．

*3　δ_{ij}は Kronecker のデルタである．すなわち，$\delta_{ij} = 1\ (i = j), = 0\ (i \neq j)$.

(i) E の任意の 2 元は常に同値

(ii) S の元で E のどれかの元に同値なものは E に属する

をみたすとき，S を ～ で割って得た**同値類** (equivalence class) であるといわれる．それら同値類の全体を S/～ で表わす． □

集合 S と同値関係 ～ が与えられたとき，同値類は必ず存在する．実際，S の任意の元 a をとって，これに同値な元の全体を E_a とすれば，E_a は同値類である．これは，S の元が必ずどれかの同値類に属することを意味する．また，S の一つの元が異なる同値類にまたがって属することはない．なぜなら，条件 (ii) により二つの同値類は共通元をもてば集合として一致するからである．こうして，S はいくつかの同値類にきれいに分割される．たとえば，有理数は，(整数)/(整数) の形のものの集合を同値関係*4

$$\frac{p}{q} \sim \frac{p'}{q'}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists n \in \mathsf{Z} \quad \text{s.t.} \quad p = np',\ q = nq' \quad \text{or} \quad p' = np,\ q' = nq$$

で分類した同値類である．

群 G に，その部分群 H を媒介にして同値関係を入れよう．

定義 1.5 G の任意の 2 元 x, y の同値関係を

$$x^{-1}y \in \mathsf{H} \quad \Longleftrightarrow \quad x \sim y \pmod{\mathsf{H}} \tag{1.3}$$

と定め，これが成り立つとき x と y は H を法として**左同値** (left-equivalent modulo H) であるという． □

これは確かに同値関係を定める．実際，まず反射律は自明．対称律は

$$\begin{aligned} x \sim y \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists h \in \mathsf{H},\ x^{-1}y = h \\ &\Longrightarrow \quad y^{-1}x = h^{-1} \in \mathsf{H} \quad \Longleftrightarrow \quad y \sim x \end{aligned}$$

として得られ，推移律も

$$\begin{aligned} x \sim y,\ y \sim z \quad &\Longrightarrow \quad \exists h, h' \in \mathsf{H},\ x^{-1}y = h,\ y^{-1}z = h' \\ &\Longrightarrow \quad x^{-1}z = hh' \in \mathsf{H} \end{aligned}$$

から得られる．H が部分群であることが効いている．

---

*4 「$\exists n \in \mathsf{Z}$ s.t. $p' = np$」は，「$p' = np$ となるような整数 n が存在する」ことを意味する．s.t. は such that の略記．

定義 1.6　群 G をその部分群 H による左同値関係で割って得る同値類を H に関する G の**左剰余類** (left coset) という．その全体を G/H と記す．　□

例 1.14　n を正の整数とする．その倍数全体の集合 $n\mathsf{Z}$ は加法群 Z の部分群である．これを H とすれば，(1.3) は $x, y \in \mathsf{Z}$ に対し

$$y - x \text{ が } n \text{ の倍数} \iff x \sim y$$

を意味し，これで Z を割った剰余類は

$$\mathsf{H}_k = \{\text{整数} \mid n \text{ で割ったときの剰余が } k\} \quad (k = 0, \cdots, n-1)$$

の n 個である．剰余類の名はここからきたのである．たとえば，$n = 3$ のとき

$$\mathsf{H}_0 = \{\cdots, -3, 0, 3, 6, \cdots\},$$
$$\mathsf{H}_1 = \{\cdots, -2, 1, 4, \cdots\},$$
$$\mathsf{H}_2 = \{\cdots, -1, 2, 5, \cdots\}$$

である．いいかえれば，

$$\mathsf{H}_0 = \mathsf{H}, \quad \mathsf{H}_1 = 1 + \mathsf{H}, \quad \mathsf{H}_2 = 2 + \mathsf{H} \tag{1.4}$$

であって，これらの集合が Z/3Z である．

$$\mathsf{Z}/3\mathsf{Z} = \{\mathsf{H}_0 = \mathsf{H},\ \mathsf{H}_1,\ \mathsf{H}_2\} \tag{1.5}$$ □

G の単位元を含む左剰余類は H そのものであり，一般に

定理 1.2　H を G の部分群とするとき，G の任意の元 a に対し $a\mathsf{H}$ は a を含む左剰余類である．そうした剰余類の各々から任意に一つずつ a_iをとれば $\mathsf{G} = \bigcup_i a_i\mathsf{H}$ $(a_i\mathsf{H} \cap a_j\mathsf{H} = \emptyset\ (i \neq j))$ となる．　□

定理の後半の命題を

$$\mathsf{G} = \sum_i a_i\mathsf{H} \tag{1.6}$$

とも書き，群 G の**左剰余類分割**とよぶ．その例は (1.4), (1.5) に見られる．

［証明］　同値類の 2 条件 (定義 1.4) のうち (i) は

$$x, y \in a\mathsf{H} \implies \exists h, h' \in \mathsf{H}:\ x = ah,\ y = ah'$$
$$\implies x^{-1}y = h^{-1}h' \in \mathsf{H} \implies x \sim y$$

として確かめられ，(ii) も成り立つ：

$$x \in a\mathsf{H},\ y \sim x \implies \exists h, h' \in \mathsf{H}:\ x = ah,\ x^{-1}y = h'$$
$$\implies y = ahh' \in a\mathsf{H}.$$

H が有限群なら G の左剰余類の元の個数も有限で|H|に等しい．　∎

例 1.15 一般に $(q_1, q_2, \cdots, q_l)$ で $q_1 \to q_2 \to \cdots \to q_l \to q_1$ とする置換 (巡回置換) を表わせば，3 次の対称群は

$$\mathrm{S}_3 = \Big\{e, (12), (23), (31), (123), (132)\Big\}$$

と書ける．そして，その部分群 $\mathrm{A}_3 = \{e, (123), (132)\}$ によって

$$\mathrm{S}_3 = \mathrm{A}_3 + (12) \cdot \mathrm{A}_3 \tag{1.7}$$

と左剰余類分割される．実際，$(12)(123) = (23)$, $(12)(132) = (31)$ である．(1.7) の (12) は (23) でも (31) でもよい．なお，置換 (n_1, n_2) を互換という． □

定義 1.5 の $x^{-1}y$ を xy^{-1} に換え，あとは同様にして**右剰余類** (right coset) が定義される．H 自身は左剰余類でもあり，右剰余類でもある．可換群からつくった剰余類には左右の区別がない．

一般に，右剰余類は Ha と書ける．右剰余類の全体を G \ H と記す．左剰余類 aH の元の逆元は右剰余類 Ha^{-1} に属し，逆も真であるから，次の定理が成り立つ．

定理 1.3 $\mathsf{G} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathsf{M}_\lambda$ を G の部分群 H に関する左剰余類分割とすれば，$\mathsf{G} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathsf{M}_\lambda^{-1}$ が成り立ち，これは G の H に関する右剰余類分割になっている．ここに M_λ^{-1} は，(1.2) の記法で，M_λ の元の逆元からなる集合を表わす． □

G の左剰余類の数は右剰余類の数に等しい．この数を H の G における**指数** (index) とよび [G : H] で表わす．上に述べたことから

定理 1.4 (Lagrange の定理) H を有限群 G の部分群とすれば

$$|\mathsf{G}| = [\mathsf{G} : \mathsf{H}] \cdot |\mathsf{H}|.$$

したがって，有限群 G の部分群の位数 |H| は G の位数 |G| の約数である． □

群 G の元 a に対し $a^m = e$ となる最小の正の整数 m を a の**位数**(order)という．そのような整数 m が存在しないとき位数は 0 と定める．

群 G において，位数 m の元 a から $\{e, a, a^2, \cdots, a^{m-1}\}$ をつくると，これは部分群になるので，定理 1.4 から m が |G| の約数であることがわかる．

群には，また別の同値関係を入れることもできる．

定義 1.7 群 G の二つの元 x, y に対して

$$\exists a \in \mathsf{G} \quad \text{s.t.} \quad y = axa^{-1}$$

となるとき，x と y は互いに**共役** (conjugate) であるという． □

これは同値関係である．これで G を割って得られる同値類を**共役類** (conjugacy class) という．G の中心に属する元は，それ一つで共役類をなす．

有限群 G の共役類それぞれの元の個数を $n_1, \cdots, n_h$ とすれば

$$|\mathsf{G}| = n_1 + \cdots + n_h \tag{1.8}$$

が成り立つ．これを G の類等式 (class equation) という．どの n_k も $|\mathsf{G}|$ の約数である (演習問題 1.7)．

例 1.16 二面体群 D_n 正 n 角形を中心のまわりに $2\pi/n$ 回転させる a と，一つの対称軸のまわりに π だけ回す (裏返しにする) b とから生成される群

$$\mathrm{D}_n = \{e, a, \cdots, a^{n-1}, b, ba, \cdots, ba^{n-1}\}$$

を二面体群 (dihedral group) という (図 1.3)．明らかに

$$a^n = e, \quad b^2 = e, \quad bab = a^{-1} \tag{1.9}$$

の関係があり，これによって D_nの任意の 2 元の積が決定される．

共役類を見いだそう．n を奇数とする．まず，b による共役関係

$$bab^{-1} = bab = a^{-1} = a^{n-1}, \quad ba^{-1}b^{-1} = (bab^{-1})^{-1} = a$$

で $\{a, a^{n-1}\}$ は閉じ，一つの共役類をなす．$\{a^2, a^{n-2}\}, \cdots, \{a^{(n-1)/2}, a^{(n+1)/2}\}$ も同様で，この種の対が $(n-1)/2$ 個できる．次に，a による共役関係は

$$aba^{-1} = b^{-1}a^{-2} = ba^{n-2}, \quad a(ba^{-2})a^{-1} = ba^{n-4}, \quad \cdots$$

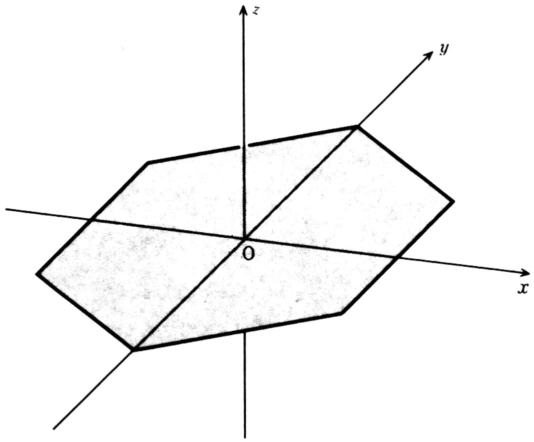


図 1.3

と続き共役類 $\{b, ba^2, \cdots, ba^{n-1}, ba, \cdots, ba^{n-2}\}$ をもたらす．まとめると，n が奇数のときの共役類は次の $(n+3)/2$ 個になる：

$$\{e\}, \{a, a^{n-1}\}, \cdots, \{a^{(n-1)/2}, a^{(n+1)/2}\}, \{b, ba, ba^2, \cdots, ba^{n-1}\}$$

n が偶数のときには $(n+6)/2$ 個になる：

$$\{e\}, \{a, a^{n-1}\}, \cdots, \{a^{(n-2)/2}, a^{(n+2)/2}\},$$
$$\{a^{n/2}\}, \{b, ba^2, \cdots, ba^{n-2}\}, \{ba, ba^3, \cdots, ba^{n-1}\}$$

$n=2$ の場合，これは特に簡単になる．D_2 は C_{2v}(例 1.7) と同形である． □

例 1.17 3 次の対称群 S_3 の共役類は $\{e\}$，$\{(12), (13), (23)\}$，$\{(123), (132)\}$ の三つである． □

例 1.18 正八面体群 (例 1.6) の共役類は次の五つである：

$$\{e\}, \{u_1, \cdots, u_6\}, \{d_1, d_1^2, \cdots, d_4, d_4^2\}, \{a_x, a_x^3, \cdots, a_z, a_z^3\}, \{a_x^2, \cdots, a_z^2\}$$ □

§1.3 正規部分群と剰余群

前節の左剰余類と右剰余類は，部分群 H が次のようなものであれば，一致する．

定義 1.8 群 G の部分群 N が，条件

$$x \in \mathsf{G} \quad \Longrightarrow \quad x\mathsf{N} = \mathsf{N}x \tag{1.10}$$

をみたすとき**正規部分群** (normal subgroup) であるという[*5]． □

注意 定義の条件 (1.10) は

$$x\mathsf{N}x^{-1} \subset \mathsf{N} \qquad (\forall x \in \mathsf{G}) \tag{1.11}$$

でよい．実際，x^{-1}に対しても (1.11) は成り立ち $x^{-1}\mathsf{N}x \subset \mathsf{N}$ ．よって，$\mathsf{N} \subset x\mathsf{N}x^{-1}$.

例 1.19 $\mathrm{SL}(n, \mathsf{K})$ は $\mathrm{GL}(n, \mathsf{K})$ の正規部分群である．実際，どの $x \in \mathrm{GL}(n, \mathsf{K})$ による $a \in \mathrm{SL}(n, \mathsf{K})$ の変形 xax^{-1} も，$\det(a) = 1$ により

$$\det(xax^{-1}) = \det(x)\det(x^{-1}) = 1$$

をみたし $xax^{-1} \in \mathrm{SL}(n, \mathsf{K})$. □

---

*5 単位元のみからなるトリヴィアルな場合を除いたとき真の正規部分群という．本書では，それだけを考え，“真に” は省く．

例 1.20 対称群 S_4 において，

$$N = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \tag{1.12}$$

は正規部分群である．実際，たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix} (12)(34) = (p_1 p_2)(p_3 p_4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}$$

となる．(1.12) は交代群 A_4 の正規部分群でもある．一般に $n \neq 4$ では A_n は正規部分群をもたず，S_n の唯一の正規部分群であることが知られている．　□

正規部分群をもたない群は**単純** (simple) であるという．

与えられた群 G から正規部分群をつくる方法に，交換子を利用するものがある．$a, b \in G$ の**交換子** (commutator) とは $aba^{-1}b^{-1}$ をいう．G のすべての交換子によって生成される群を G の**交換子群** (commutator group) といい，D(G) と記す．

定理 1.5 G の交換子群 D(G) は G の正規部分群である．

［証明］ $x \in G \implies x(aba^{-1}b^{-1})x^{-1}$

$$= (xax^{-1})(xbx^{-1})(xax^{-1})^{-1}(xbx^{-1})^{-1} \in D(G).$$ ∎

群 G の正規部分群 N の正規部分群 N′ は G の正規部分群であるとは限らない．実際，4 次の対称群 S_4 における (1.12) と $N' = \{1, (12)(34)\}$ との組は否定的な例である．しかし，

定理 1.6 群 G の部分群 H と正規部分群 N に対して，(1.2) の記法で

(i) HN = NH であって，これは G の部分群である．

(ii) $H \cap N$ は H の正規部分群である．

［証明］ (i) N が正規部分群だから $HNH^{-1} \subset N$ となり $HN \subset NH$. 他方，$H = H^{-1}$ なので $NH \subset HN$ もいえる．そして，$(HN)(HN)^{-1} = HNH^{-1}$ から HN は G の部分群であることがわかる．

(ii) 任意の $x, y \in H \cap N$ に対し $xy^{-1} \in H$ であり，$xy^{-1} \in N$ でもあるから $xy^{-1} \in H \cap N$. ゆえに定理 1.1 により $H \cap N$ は部分群である．任意の $h \in H$ に対し $hN = Nh$ がいえるから，それは正規部分群である．　∎

さて，正規部分群 N を法として剰余類をつくると左右の区別がない．そればかりか，(1.2) によって剰余類の積を定義すると G/N は群になる．実際，$A \in G/N$

とすれば，$a \in \mathsf{G}$ により $\mathsf{A} = a\mathsf{N}$ と書け，B も同様であって

$$\mathsf{AB} = (a\mathsf{N})(b\mathsf{N}) = a(\mathsf{N}b)\mathsf{N} = a(b\mathsf{N})\mathsf{N} = ab\mathsf{N}$$

という計算から $\mathsf{AB} \in \mathsf{G/N}$ が知れる．この積は結合律をみたし，N が単位元に，A^{-1}が A の逆元になることも確かめられる．そこで

定義 1.9 群 G の正規部分群を N とするとき，N を法とする G の剰余類の全体 G/N がなす群を**剰余群**または**因子群** (factor group) という． □

例 1.21 $\mathsf{Z}/n\mathsf{Z}$ に積 $\mathsf{H}_k\mathsf{H}_l = \mathsf{H}_r$ $(r = k + l \pmod{n})$ をいれると剰余群 Z_nが できる．ここに，$r = k + l \pmod{n}$ は $k + l$ を n で割った剰余を表わす． □

例 1.22 群 G を交換子群 D(G) で割って得る剰余群は可換群である．また，N が G の正規部分群で G/N が可換群となるなら，N はすべての交換子を含み，したがって D(G) を含む．これを証明するには，$A \in \mathsf{G/D(G)}$ が $a\mathsf{D(G)}$, $a \in \mathsf{G}$ と書けることに注意して $ABA^{-1}B^{-1}$を計算すればよい． □

§1.4 同形と準同形

二つの群の構造が同じとみなせる場合がある．

定義 1.10 群 G から群 G′への写像 f が群演算を保存するなら，すなわち

$$x, y \in \mathsf{G} \quad \Longrightarrow \quad f(xy) = f(x)f(y) \tag{1.13}$$

が成り立つならば f を G から G′への**準同形写像** (homomorphism) という．特に f が全単射*6のときには**同形写像** (isomorphism) であるという．G から G′への同形写像が存在するとき G は G′に**同形** (isomorphic) であるといい $\mathsf{G} \cong \mathsf{G}'$と記す． □

f が準同形なら，(1.13) から G の単位元 e の像は G′の単位元 e'であり，x^{-1} の像は x の像の逆元に一致する．すなわち

$$f(e) = e', \quad f(x^{-1}) = \Big[f(x)\Big]^{-1}. \tag{1.14}$$

---

*6 G から G′への写像 f が全単射であるとは，値域が G′全体 (全射) で 1 対 1 (単射) であることをいう．全単射な写像は逆をもつ．

値域が G′全体である写像，すなわち G′への全射は，G′の “上への” 写像であるともいう．全射でないとき “中への” 写像という．

G''を第3の群とし，gをG'からG''への準同形写像とすれば，合成写像$g\circ f$はGからG''への準同形写像になる．

もし$\mathsf{G}\cong\mathsf{G}'$なら，Gから$\mathsf{G}'$への写像$f$は同形写像で逆をもち，これも同形写像だから$\mathsf{G}'\cong\mathsf{G}$となる．同形の関係は，このように相互的なのでGと$\mathsf{G}'$とは同形である，という方がふさわしい．これは同値関係でもある．

例 1.23　(1.12) の群Nは四元群 (例 1.2) に同形である．　□

例 1.24　群Gの正規部分群をNとするとき，Gの各元xにNを法とする剰余類のうちでxを含むものを対応させる写像fを**標準写像** (canonical map) という．これはGからG/Nへの全射ではあるが単射でないから，準同形写像ではあるが同形ではない．　□

全射であるが単射でないために準同形である写像$f:\mathsf{G}\longrightarrow\mathsf{G}'$を，同形に直す手だてを考えたい．$f$が準同形であるのは，Gの複数の元 (原像) を$\mathsf{G}'$の同一の元 (像) に対応させるためであるから，その複数の原像を一つのものと見るようにすれば同形写像が得られる．まず，G'の単位元e'に対応する原像たちに注目しよう．

定義 1.11　fがGからG'への準同形写像であるとき，$e'\in\mathsf{G}'$の原像全体の集合を写像fの**核** (kernel) といい，Ker(f) と記す:

$$\mathrm{Ker}(f)=\{x\in\mathsf{G}\ |f(x)=e'\}.$$　□

定理 1.7　Ker(f) はGの正規部分群である．

［証明］　まず，(1.14) によりKer(f) はeを含むので空でない．もし$x,y\in\mathrm{Ker}(f)$なら

$$f(xy^{-1})=f(x)f(y)^{-1}=e'e'=e'$$

なので$xy^{-1}\in\mathrm{Ker}(f)$となるから，定理1.1により，核は部分群をなす．その上

$$x\in\mathsf{G},\ y\in\mathrm{Ker}(f)\quad\Longrightarrow\quad f(xyx^{-1})=f(x)f(y)f(x)^{-1}=e'$$
$$(f(y)=e'\text{なので})$$

から$xyx^{-1}\in\mathrm{Ker}(f)$となるので，Ker($f$) は正規部分群である．　∎

定理 1.8 (準同形定理)　fをGからG'の上への準同形写像とする．Gはfの核で割ればG'に同形となる：

$$\mathsf{G}/\mathrm{Ker}(f)\cong\mathsf{G}'.$$

[証明] まず，写像 f は $\mathsf{G}/\mathrm{Ker}(f)$ の任意の剰余類 X を (そのどの元をも)G' の (同一の) 元に対応させる．実際，$x, y \in X$ とすれば，これらは $\mathrm{Ker}(f)$ を法として同値なので $x^{-1}y \in \mathrm{Ker}(f)$ となるが，これは $\mathrm{Ker}(f)$ の適当な元 q をとれば $y = xq$ となることだから

$$f(y) = f(xq) = f(x)f(q) = f(x) \qquad (f(q) = e' \text{だから}).$$

そこで，各剰余類 X から一つずつ元 x をとり，それぞれに

$$g(X) = f(x) \tag{1.15}$$

によって G' の元 $f(x)$ を対応させる．このとき：

(i) g は準同形写像である．実際，同値類 X, Y から，それぞれ x, y をとれば，

$$g(XY) = f(xy) = f(x)f(y) = g(X)g(Y).$$

(ii) g は単射である．いま，仮に単射でなかったとして，二つの $X \neq Y \in \mathsf{G}/\mathrm{Ker}(f)$ が同一の像をもったとすると $g(X) = g(Y)$ から

$$e' = g(X^{-1})g(X) = g(X^{-1})g(Y) = g(X^{-1}Y) = f(x^{-1}y)$$

となるが，$\mathrm{Ker}(f)$ の定義から $x^{-1}y \in \mathrm{Ker}(f)$．これは $X^{-1}Y$ が $\mathsf{G}/\mathrm{Ker}(f)$ の単位元に等しいということにほかならず，$X = Y$．ゆえに，同一の像を結ぶ原像は一つしかない．よって，g は単射である．

(iii) g は G' の上への写像 (全射) である．なぜなら，f は全射だったから任意の $a' \in \mathsf{G}'$ に対し適当な $a \in \mathsf{G}$ が存在して $f(a) = a'$ となる．そこで，この a を含む剰余類を A とすれば (1.15) により $g(A) = f(a) = a'$ ．

こうして (1.15) が $\mathsf{G} \longrightarrow \mathsf{G}'$ の準同形かつ全単射の写像であることが示された．

∎

例 1.25 K^* を K の 0 でないすべての元がつくる乗法群とするとき

$$\mathrm{GL}(n, \mathsf{K})/\mathrm{SL}(n, \mathsf{K}) \cong \mathsf{K}^*.$$

実際，$X \in \mathrm{GL}(n, \mathsf{K})$ に $\det X$ を対応させる写像を f とすれば，これは K^* の上への準同形写像であって $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{SL}(n, \mathsf{K})$ となる． □

定理 1.9 (第 1 同形定理) f を群 G から群 G' の上への準同形写像とし，N' を G' の正規部分群とするとき，$\mathsf{N} = f^{-1}(\mathsf{N}')$ は G の正規部分群であって

$$\mathsf{G}/\mathsf{N} \cong \mathsf{G}'/\mathsf{N}'.$$

[証明] G' から $\mathsf{G}^* \equiv \mathsf{G}'/\mathsf{N}'$ への標準写像を φ とすれば，$\varphi \circ f$ は G から G^* の上への準同形写像であって，G^* の単位元を e^* とすれば

$$\mathrm{Ker}(\varphi\circ f)=(\varphi\circ f)^{-1}(e^*)=f^{-1}\Big(\varphi^{-1}(e^*)\Big)=f^{-1}(\mathsf{N}')=\mathsf{N}$$

となるから，定理 1.7 により N は G の正規部分群であって，準同形定理により $\mathsf{G}/\mathsf{N}\cong\mathsf{G}^*$. ∎

定理 1.10 (第 2 同形定理) 群 G の部分群を H，正規部分群を N とすれば

$$\mathsf{H}/(\mathsf{H}\cap\mathsf{N})\cong\mathsf{HN}/\mathsf{N}.$$

［証明］ $\mathsf{H}\cap\mathsf{N}$ が正規部分群であること，HN が G の部分群であることは定理 1.6 で見た．任意の $x\in\mathsf{H}$ に対し $x\mathsf{N}$ は，定理 1.2 により，x を含む HN/N の剰余類であるから

$$f(x)=x\mathsf{N}\quad は\quad \mathsf{H}\longrightarrow\mathsf{HN}/\mathsf{N}\ の写像$$

を定める．ところが，f は，まず準同形である．実際

$$f(xy)=xy\mathsf{N}=xy\mathsf{NN}=x\mathsf{N}y\mathsf{N}=f(x)f(y).$$

また全射でもある．実際，HN/N の任意の剰余類 K をとれば $\mathsf{K}=hn\mathsf{N}$ ($h\in\mathsf{H}$, $n\in\mathsf{N}$) と書けて $\mathsf{K}=h\mathsf{N}$ となるから $f(h)=\mathsf{K}$. よって，f に準同形定理が適用できるが，定理 1.2 により HN/N の単位元は N だから

$$\mathrm{Ker}(f)=f^{-1}(\mathsf{N})=\{x\in\mathsf{H}|f(x)=\mathsf{N}\}=\mathsf{H}\cap\mathsf{N}$$

である． ∎

例 1.26 (1.12) の N は対称群 S_4 の正規部分群であったが

$$S_4/\mathsf{N}\cong S_3.$$

実際，S_4 の置換のうち文字 1 を動かさないものの全体が S_3 と同形なので

$$S_3\cap\mathsf{N}=\{e\},\quad S_3\mathsf{N}=S_4$$

となり，第 2 同形定理によって証了． □

§1.5 変換群

GL(n,K) は，その元である行列 A が列ベクトル $x\in\mathsf{K}^n$ を行列の積 Ax により変換する．一般に

定義 1.12 群 G が集合 X に作用する**変換群** (transformation group) であるとは，$a\in\mathsf{G}$ と $x\in\mathsf{X}$ の対に $x'\in\mathsf{X}$ を対応させる写像 $(a,x)\mapsto x'$ が与えられていて，これを $ax=x'$ と書くとき，次の 2 条件をみたすことをいう：

(i) $a, b \in \mathsf{G},\ x \in \mathsf{X} \implies (ab)x = a(bx)$

(ii) $x \in \mathsf{X} \implies ex = e$ (e は G の単位元)　□

例 1.27　水分子において，各原子の平衡位置からの変位を図 1.3 の座標系で表わし，一つの縦ベクトル ($\in \mathsf{R}^9$) に配列する．すると，例 1.7 の群 $\mathrm{C_{2v}}$ は $\mathsf{X} = \mathsf{R}^9$ に作用する変換群となる．C_2の作用は，図 1.4 から分かるとおり

$$C_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & -1 & 0 & 0 & & & \\ & O & & 0 & -1 & 0 & & O & \\ & & & 0 & 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & -1 & 0 & & O & & & O & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ & & & & & & -1 & 0 & 0 \\ & O & & & O & & 0 & -1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

この行列を $R^{(9)}(C_2)$ と書く．σ_{v}の作用は，それを

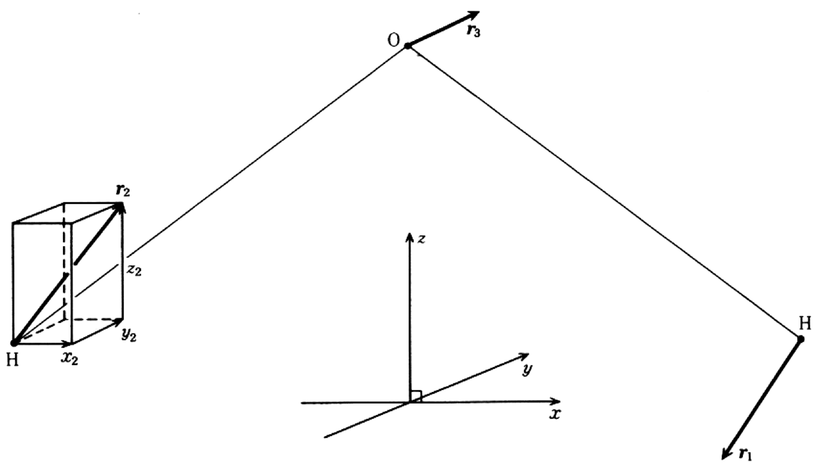


図 1.4　変位の座標系．変位まえの分子面を xz 面とする．

$$R^{(9)}(\sigma_{\rm v}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & O & & & O & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & 0 & 0 & & & \\ & O & & 0 & 1 & 0 & & O & \\ & & & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & & & -1 & 0 & 0 \\ & O & & & O & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

に換えれば得られる．$\sigma'_{\rm v}$の行列は，例 1.7 の $\sigma'_{\rm v} = \sigma_{\rm v} C_2$から $R^{(9)}(\sigma_{\rm v})R^{(9)}(C_2)$ となる． □

ここでは，群 $\mathrm{C_{2v}}$の操作を分子に施して各原子を変位ごと動かしたが，座標軸に施すと考えることもできる．前者が能動的な変換，後者が受動的な変換である．群の同じ元が引き起こす能動，受動の変換は行列に書けば互いに逆行列の関係になる．

いま，X の一つの元 x をとり，これを動かさない G の元全体を H_xとすれば，これは G の部分群をなし，x における G の**等方部分群** (isotropic subgroup), またはリトルグループ (little group) とよばれる．G の元で，どの $x \in \mathsf{X}$ をも動かさないものが単位元に限るとき，G は X に**効果的**に (effectively) 作用するという．この条件は

$$\bigcap_{x \in \mathsf{X}} \mathsf{H}_x = \{e\} \tag{1.18}$$

と書くことができる．GL(n, K) は K^nに効果的に作用する．

X の 2 元 x, y に対して，x を y に移す G の元が存在するとき $x \sim y$ とすれば，これは同値関係になる．この関係による X の同値類を G による**軌道** (orbit) という．軌道は X 全体となることもある．このとき G は X に**推移的**に (transitively) 作用するといい，X は**等質空間** (homogeneous space) とよばれる．

例 1.28 例 1.27 の変換群は，すべての原子が z 方向に変位する変位ベクトルを動かさないから $\mathsf{X} = \mathsf{R}^9$に効果的には作用しない．効果的でない作用は推移的

でもない． □

例 1.29　$\mathrm{GL}(n,\mathsf{K})$ の K^nへの作用は効果的であるが，推移的ではない．軌道は $\{0\}$ と $\mathsf{K}^n-\{0\}$ の二つある．

$\{0\}$ が軌道であることは自明．$\mathsf{K}^n-\{0\}$ が軌道であることを証明するには，その任意の元 x をとり

$$A_x e_n = x \qquad (e_n = (0,\cdots,0,1)^{\mathrm{t}})$$

とする行列 A_x $(\det A_x \neq 0)$ があることを示せばよい．そうすれば

$$y = A_y(A_x)^{-1}x, \quad A_y(A_x)^{-1} \in \mathrm{GL}(n,\mathsf{K})$$

より $x\sim y$がわかる．A_xは，x を最後に含む K^nの基底 $(a_1,\cdots,a_{n-1},x)$ をとり

$$A_x = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n-1,1} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & a_{n-1,n} & x_n \end{pmatrix}$$

とすればよい．ただし，$a_i, x \in \mathsf{K}^n$の j 成分を $a_{i,j}, x_j$とした． □

例 1.30　$\mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n)$ は上の例と同様に列ベクトルに作用するものとして n 次元 Euclid 空間 R^nの球面 S^{n-1}に推移的に作用し，任意の 0 でない $x\in\mathsf{R}^n$における等方部分群は $\mathrm{O}(n-1), \mathrm{SO}(n-1)$ に同形である．証明略． □

例 1.31　G を群，H をその部分群とする．G/H の元 (左剰余類) K と $a\in\mathsf{G}$ との積 $a\mathsf{K}$ はまた G/H に属するから，G は G/H に作用する変換群とみなせる．その作用は推移的である．これを変換群の**標準モデル** (canonical model) とよぶ． □

定義 1.13　G, G'をそれぞれ X, X'に作用する変換群とする．G から G'への同形写像 f と X から X'への全単射 g で

$$a\in\mathsf{G},\ x\in\mathsf{X} \quad\Longrightarrow\quad g(ax)=f(a)g(x) \tag{1.19}$$

をみたすものが存在するとき対 (G,X) と $(\mathsf{G}',\mathsf{X}')$ は同形であるという． □

次の定理は，推移的に作用する変換群が，変換群の標準モデルと同じであることを示す．

定理 1.11　G を X に推移的に作用する変換群とし，X の一つの元 x_0における等方部分群を H_0とする．対 (G,X) は対 $(\mathsf{G},\mathsf{G}/\mathsf{H}_0)$ と同形である．

［証明］ X の任意の元 x に対し $ax_0=x$ とする $a\in\mathsf{G}$が存在するから，π を

$\mathsf{G} \longrightarrow \mathsf{G}/\mathsf{H}_0$の標準写像 (例 1.24) として $g(x) = \pi(a)$ とおく．これは a の選び方によらず，g をよく定義する．実際，a' も $a'x_0 = x$ とするなら $a^{-1}a' \in \mathsf{H}_0$ となり $\pi(a') = \pi(a)$．この g は単射である．実際，もし $bx_0 \neq ax_0$ なら $a^{-1}b \notin \mathsf{H}_0$ となり $\pi(b) \neq \pi(a)$ だから $g(b) \neq g(a)$．また g は全射である．なぜなら G/H_0 の任意の元 $k\mathsf{H}_0$に対して $g(kx_0) = \pi(k) = k\mathsf{H}_0$ となる．

そして，最後に任意の $a \in \mathsf{G}$ に対し $f(a) = a$ とすれば，これは同形写像である．(1.19) が成り立つことは，$x = ax_0$ とする a を用いて $g(bx)$ を計算し

$$g(bx) = g(bax_0) = \pi(ba) = ba\mathsf{H}_0, \quad g(ax_0) = a\mathsf{H}_0$$

を比較すれば $g(bx) = f(b)g(x)$．　■

§1.6 群の直積と半直積

集合 $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2$の元 x_1，x_2を並べた (x_1, x_2) の全体を直積集合 $\mathsf{G}_1 \times \mathsf{G}_2$という．

定義 1.14 群 G_1，G_2の直積集合 $\mathsf{G}_1 \times \mathsf{G}_2$は，それぞれの群の演算を用いて

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2) \quad (x_1, y_1 \in \mathsf{G}_1,\ x_2, y_2 \in \mathsf{G}_2) \tag{1.20}$$

なる積を定義すれば群になる．これを群 G_1と G_2の**直積** (direct product) といい，$\mathsf{G}_1 \times \mathsf{G}_2$で表わす．

G_i $(i = 1,\ 2)$ の単位元を e_iとし，x_iの逆元を x_i^{-1}とすれば，直積 $\mathsf{G}_1 \times \mathsf{G}_2$の単位元は (e_1, e_2) であり，(x_1, x_2) の逆元は (x_1^{-1}, x_2^{-1}) である．また

$$\mathsf{N}_1 = \{(x_1, e_2) | x_1 \in \mathsf{G}_1\}, \quad \mathsf{N}_2 = \{(e_1, x_2) | x_2 \in \mathsf{G}_2\}$$

は $\mathsf{G}_1 \times \mathsf{G}_2$の正規部分群である．$\mathsf{N}_i$は G_iと同形であり，N_1の任意の元は N_2の任意の元と可換である．さらに，(1.2) の積を用いて

$$\mathsf{G}_1 \times \mathsf{G}_2 = \mathsf{N}_1\mathsf{N}_2, \quad \mathsf{N}_1 \cap \mathsf{N}_2 = \{(e_1, e_2)\} \tag{1.21}$$

が成り立つ．　□

以上の定義も性質も一般に n 個の群の直積にそのまま拡張される．

(1.21) の性質は群の直積を特徴づける．n 個の群の直積に一般化していえば

定理 1.12 群 G の正規部分群を $\mathsf{N}_1, \cdots, \mathsf{N}_n$とする．次の 2 条件が成り立つとき G は直積 $\mathsf{N}_1 \times \cdots \times \mathsf{N}_n$に同形である．

(i) $\mathsf{G} = \mathsf{N}_1 \cdots \mathsf{N}_n$

(ii) $(\mathsf{N}_1 \cdots \mathsf{N}_{i-1}) \cap \mathsf{N}_i = \{e\}$ $(i = 2, \cdots, n;\ e$ は G の単位元$)$

［証明］ はじめに，(ii) から任意の i, j に対し $\mathsf{N}_i \cap \mathsf{N}_j = \{e\}$ となることに注意する．これから $i \neq j$ のとき任意の $x_i \in \mathsf{N}_i$ と $x_j \in \mathsf{N}_j$ は可換であることがでる．実際，N_j が正規部分群なので $x_i^{-1} x_j x_i \in \mathsf{N}_j$ となるから，これを x_j' と書けば

$$x_i = x_j^{-1} x_i x_j' = (x_j^{-1} x_i x_j) x_j^{-1} x_j'$$

となるが，N_i も正規部分群なので右辺の $(\cdots)$ は $x_i' \in \mathsf{N}_i$ と書けて

$$(x_i')^{-1} x_i = x_j^{-1} x_j'.$$

この左辺は N_i に，右辺は N_j に属するので，最初の注意から両辺とも e に等しい．これは $x_j x_i = x_i x_j$ を意味する．

再び (i), (ii) を用いれば，G の任意の元 x が

$$x = x_1 \cdots x_n \qquad (x_i \in \mathsf{N}_i,\ i = 1, \cdots, n)$$

と一意に表わされることがわかる．そこで写像

$$f : \mathsf{N}_1 \times \cdots \times \mathsf{N}_n \longrightarrow \mathsf{G}$$

を

$$f(x_1, \cdots, x_n) = x_1 \cdots x_n$$

によって定義すれば，これが同形写像になる． ∎

この定理の仮定が成り立つとき G を $\mathsf{N}_1, \cdots, \mathsf{N}_n$ の直積ということがある．群の直積は，量子力学の多体問題にも現われる．

例 1.32 運動量演算子からつくった並進演算子の群 $\mathrm{T}(\mathsf{R})$ (例 1.8) は，2 粒子系に対しては，それぞれの粒子の群の直積になる．すなわち

$$\mathrm{T}(\mathsf{R}) \times \mathrm{T}(\mathsf{R}) = \left\{ \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{p}_1 a_1/\hbar}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{p}_2 a_2/\hbar} \right) \middle| a_1, a_2 \in \mathsf{R} \right\}.$$

その元は，2 粒子系の波動関数 $\psi(x_1, x_2)$ に

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{p}_1 a_1/\hbar} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{p}_2 a_2/\hbar} \psi(x_1, x_2) = \psi(x_1 - a_1, x_2 - a_2)$$

のように作用する．よって $\mathrm{T}(\mathsf{R}) \times \mathrm{T}(\mathsf{R}) = \mathrm{T}(\mathsf{R}^2)$．これは定理 1.12 の簡単な例になっている． □

定理 1.13 群 G_i とその正規部分群 N_i $(i = 1, \cdots, n)$ に対して

$$(\mathsf{G}_1 \times \cdots \times \mathsf{G}_n)/(\mathsf{N}_1 \times \cdots \times \mathsf{N}_n) \cong (\mathsf{G}_1/\mathsf{N}_1) \times \cdots \times (\mathsf{G}_n/\mathsf{N}_n)$$

［証明］ G_1 から $\mathsf{G}_i/\mathsf{N}_i$ への標準写像 (例 1.24) を π_i とし

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \Big(\pi_1(x_1), \cdots, \pi_n(x_n)\Big)$$

により写像 $\mathsf{G}_1 \times \cdots \times \mathsf{G}_n \longrightarrow (\mathsf{G}_1/\mathsf{N}_1) \times \cdots \times (\mathsf{G}_n/\mathsf{N}_n)$ を定義して，準同形定理を用いる． ∎

例 1.33 加法群 R/Z(例 1.14 を参照) は，R に周期的境界条件をつけた線分 [0, 1]，あるいは長さ 1 の円周の上の変位の全体となる．これを T と書けば T^2 は 2 次元トーラス面上の変位の全体になる．定理 1.13 のいう $\mathrm{T}^2 = \mathsf{R}^2/\mathsf{Z}^2$ は，これが 1 辺の長さ 1 の正方形上で周期的境界条件をつけて考えた変位の全体に対応することを意味している．T^n を n 次元**トーラス群** (torus group) という． □

群の半直積を定義するため，まず簡単な例をみよう．

例 1.34 空間 R^n に定ベクトル a をとる．R^n の各点 x の平行移動 $L_a x = x + a$ の全体 $\{L_a | a \in \mathsf{R}^n\}$ は並進群 $\mathrm{T}(\mathsf{R}^n)$ をなす．$\mathrm{SO}(n)$ は，この空間の回転である．いま，空間を原点のまわりに $\mathcal{R} \in \mathrm{SO}(n)$ だけ回転してから $L_a \in \mathrm{T}(\mathsf{R}^n)$ だけ平行移動することを $(a, \mathcal{R})$ と書けば，これによって点 x は

$$(a, \mathcal{R})x = \mathcal{R}x + a$$

に移される．同様の変換を重ねれば

$$(a', \mathcal{R}')(a, \mathcal{R})x = (a', \mathcal{R}')(\mathcal{R}x + a) = \mathcal{R}'\mathcal{R}x + \mathcal{R}'a + a'$$

となる．よって

$$(a', \mathcal{R}')(a, \mathcal{R}) = (\mathcal{R}'a + a', \mathcal{R}'\mathcal{R}). \tag{1.22}$$ □

左辺の 2 回の変換は結果として右辺の 1 回の変換に等しい．しかし，この合成の規則は，群の直積における (1.20) とは違う．そこで

定義 1.15 群 $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2$ と，G_2 から $\mathrm{Aut}\ \mathsf{G}_1$ への準同形写像 ρ とが与えられたとき，$\mathsf{G}_1 \times \mathsf{G}_2$ は，積

$$(y_1, y_2)(x_1, x_2) = (y_1[\rho_{y_2}(x_1)], y_2 x_2) \tag{1.23}$$

によって群をなす．これを $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2$ の，ρ に関する**半直積** (semi-direct product) といい，$\mathsf{G}_1 \times_\rho \mathsf{G}_2$ と記す． □

ここで $\mathrm{Aut}\ \mathsf{G}_1$ とは G_1 から自身への同形写像の全体を意味する．例 1.34 では G_1 は並進だから，並進から並進への写像であり，(1.22) の $\mathcal{R}'a + a'$ を $L_{a'} L_{\mathcal{R}'a}$ と書いて (1.23) と比較すればわかるとおり $\rho_{\mathcal{R}}(L_a) = L_{\mathcal{R}a}$ になっている．これが，実際に $\mathsf{G}_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathsf{G}_1$ の準同形であることは

$$(\rho_{\mathcal{R}'}\rho_{\mathcal{R}})(L_a) = \rho_{\mathcal{R}'}(\rho_{\mathcal{R}}(L_a)) = \rho_{\mathcal{R}'}(L_{\mathcal{R}a}) = L_{\mathcal{R}'\mathcal{R}a} = \rho_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}(L_a)$$

からわかり，$\rho_{\mathcal{R}}$が $\mathsf{G}_1 \longrightarrow \mathsf{G}_1$ の同形写像であることは

$$\rho(L_a L_b) = \rho(L_{a+b}) = L_{\mathcal{R}(a+b)} = L_{\mathcal{R}a+\mathcal{R}b} = L_{\mathcal{R}a}L_{\mathcal{R}b} = \rho(L_a)\rho(L_b)$$

からわかる．ただし，$\rho_{\mathcal{R}}$の添字 $\mathcal{R}$ を省略した．

群の直積と同様，半直積も次の定理で特徴づけられる．

定理 1.14 群の正規部分群を N，部分群を H とすれば

(i) $\mathsf{G} = \mathsf{NH}$

(ii) $\mathsf{N} \cap \mathsf{H} = \{e\}$

の 2 条件が成り立つとき $\mathsf{G} \cong \mathsf{N} \times_\rho \mathsf{H}$ となる．ただし ρ は $\rho(h)(x) = hxh^{-1}$ ($h \in$ H, $x \in$ N) によって定義される H から Aut(N) への準同形写像である． □

証明は割愛する．

演習問題

1.1 同じ共役類に属する元の位数は互いに等しいことを示せ．

1.2 正八面体群において:

(i) この群に属する操作によって軸を重ね合わせることのできる同じ角度の回転は互いに共役であることを証明せよ．

(ii) n 回軸に垂直な 2 回軸があれば，n 回軸まわりの $2\pi/n$ の回転 C_n と C_n^{-1}，したがってまた C_n^{n-1} は同じ共役類に属することを示せ．

(iii) これらの命題を用いて例 1.18 を確かめよ．

1.3 前問と同様の考察により正方形に関する二面体群の共役類を決定し，類等式を確かめよ．

1.4 群 G の公理を §1.1 の (i), (ii′), (iii′) としたとき，

(i) 右単位元は左単位元でもある．

(ii) G の任意の元は左逆元ももつ．

(iii) 左右の逆元は一致する．

無限数列の変換

$$a \cdot (x_1, x_2, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots), \quad b \cdot (x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$$

を定義すると $ab = e$ であるが $ba \neq e$ となり，a は右逆元をもつのに左逆元はもた

ない(もし，もつならbに一致するはず)．これは，(ii) に矛盾する！　このパラドックスを解け．

1.5　H を群 G の部分群とする．G における H の指数が 2 なら，H は G の正規部分群であることを確かめよ．

1.6　群 G の部分群 K は，G のすべての自己同形写像 σ に対して $\sigma(\mathsf{K})=\mathsf{K}$ をみたすとき G の**特性部分群**(characteristic subgroup) であるという．N が G の正規部分群で，K が N の特性部分群なら，K は G の正規部分群となることを示せ．

1.7　S を群 G の空でない部分集合とする．以下のことを示せ．

(i)　集合

$$\mathsf{N}(\mathsf{S}) = \{x \in \mathsf{G} | x\mathsf{S}x^{-1} = \mathsf{S}\}$$

は G の部分群をなす．(これを S の正規化群とよぶ．)

(ii)　S が G の部分群ならば，N(S) は S を正規分群にもつ，G の最大の部分群である．

(iii)　$a \in \mathsf{G}$ を固定するとき，a を含む共役類の元の数は $[\mathsf{G} : \mathsf{N}(a)]$ に等しい．

1.8　$n\,(\geqq 2)$ 次の対称群 S_n は $n-1$ 個の互換 $(12), (13), \cdots, (1n)$ によって生成されることを示せ．$n\,(\geqq 3)$ 次の交代群 A_n は $n-2$ 個の巡回置換 $(123), (124), \cdots, (12n)$ によって生成されることを示せ．

1.9　巡回置換 $(q_1, q_2, \cdots, q_l)$ の項数 l をその長さという．また $a' = bab^{-1}$ $(a, b \in \mathrm{S}_n)$ を a の b による変形とよぶ．

(i)　巡回置換は変形しても長さを変えないことを示せ．

(ii)　巡回置換の積ではどうか?

(iii)　(i) から S_4 の共役類として

$$\{e\}, \{(12), (13), \cdots\}, \{(123), (132), \cdots\}, \{(1234), (1243), \cdots\}$$

が得られる．類等式を用いて他にも共役類があることを確かめ，それは $\{(12)(34), \cdots\}$ であることを示せ．

1.10　前問の考察によれば，対称群 S_n の共役類は，S_n の元を長さ $1, 2, \cdots, n$ の巡回置換の積の形に書いたとき，それぞれが含まれる個数 $(k) := (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ で指定できる．共役類 (k) の含む元の数は次式で与えられることを証明せよ：

$$s(k) = \frac{n!}{1^{k_1} k_1!\, 2^{k_2} k_2! \cdots n^{k_n} k_n!}.$$

1.11　S_n の共役類を指定するには，その元を巡回置換の積に分解し各々の長さ λ_j を大きさの順に並べた $[\lambda] := [\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu]$ を用いてもよい．ここに

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\nu=n, \quad \lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\geqq\lambda_\nu>\lambda_{\nu+1}=0. \tag{1.24}$$

$[\lambda]$ のなかに λ_s が p 回現われるなら $[\cdots,\lambda_s^p,\cdots]$ のように略記する．$[\lambda]$ は λ_s 枚ずつのタイルの横並びを，左端をそろえて縦にならべた図形で表わすことが多い．これを **Young 図** (Young diagram) という．

(i) S_3, S_4 の共役類を Young 図で表わせ．

(ii) 前問 (i) の各 Young 図の (k) を書け．

(iii) S_5 に対し (1.24) の許す Young 図をすべて描き，それらにわたる前問の $s(k)$ の和が 5! に等しいことを示せ．これは，S_5 の場合，(1.24) の許す Young 図が共役類と 1 対 1 に対応することを示す．このことは一般に成り立つ．

1.12 S_4 において，集合 $\{1,2\}$ を変えない置換の全体 H は部分群であることを示し，H に関する左剰余類および右剰余類をすべて求めよ．

1.13 H と N が群 G の正規部分群で $\mathsf{N}\subset\mathsf{H}$ であるなら $(\mathsf{G}/\mathsf{N})/(\mathsf{H}/\mathsf{N})\cong\mathsf{G}/\mathsf{H}$ となることを示せ．

1.14 H と K を G の部分群とする．G の 2 元 a, b の間に $\mathsf{H}a\cap b\mathsf{K}\neq\emptyset$ がなりたつとき $a\sim b$ とする．以下のことを証明せよ．

(i) これは同値関係である．これによる同値類を**両側剰余類** (two-sided coset) という．

(ii) a を含む両側剰余類は $\mathsf{H}a\mathsf{K}$ で与えられる．

(iii) 両側剰余類 $\mathsf{H}a\mathsf{K}$ は，$\mathsf{H}a$ と少なくとも一つの元を共有する K の左剰余類をすべて含む．

1.15 G を群とする．

(i) $a\in\mathsf{G}$ に対し $I_a(x)=axa^{-1}\ (x\in\mathsf{G})$ で定義される写像 $I_a:\mathsf{G}\longrightarrow\mathsf{G}$ は G の自己同形であることを確かめよ．これを G の**内部自己同形** (inner automorphism) という．

(ii) G の内部自己同形の全体 Inn(G) は Aut(G) の正規部分群をなすことを示せ．

(iii) Inn(G) は G/Z(G) と同形であることを示せ．ここに Z(G) は G の元のうち他のどの元とも可換なものの全体で，G の中心とよばれる．

1.16 複素平面 C の上半分 $\{z\in\mathsf{C}|\mathrm{Im}\,z>0\}$ を X とし

$$g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2,\mathsf{R})$$

の $z\in\mathsf{X}$ への作用を

$$gz = \frac{az+b}{cz+d}$$

と定義する．次のことを証明せよ．

(i) SL(2, R) は X に推移的に作用する変換群である．

(ii) X の点 $z = \mathrm{i}$ における SL(2, R) の等方部分群は 2 次の回転群 SO(2) である．

1.17 G, H をそれぞれ位数 m, n の巡回群とする．G × H が巡回群となるためには m と n が互いに素であることが必要十分であることを示せ．この条件がみたされるとき，a, b をそれぞれ G, H の生成元とすれば (a, b) が G × H の生成元となることを示せ．

第2章

有限群の表現

群 G の各元 a に行列 $R(a)$ を対応させ $a, b \in$ G の積 ab には行列の積 $R(a)R(b)$ が対応するようにしたとき，これを群 G の行列表現という.

§2.1 表現の定義と同値性

複素数 C または実数 R を係数体とするベクトル空間 V から V 自身への全単射かつ線形な写像の全体は群をなす. これを GL(V) と記す.

例 2.1 水分子の各原子が平衡位置から勝手な変位をしたとき，その変位に群 C_{2v}(例 1.7) の各元が引きおこす変換 (図 1.4 参照) は V $=$ R^9 から V 自身への全単射かつ線形な写像であり，GL(V) の部分群をなす. □

定義 2.1 群 G から GL(V) への準同形写像 ρ (定義 1.10)，すなわち

$$\rho(a)\rho(b) = \rho(ab) \qquad (\forall a, b \in \mathrm{G}) \tag{2.1}$$

のように群の演算を保存する写像を G の V 上の**表現** (representation) といい，(ρ, V) と書く. V を表現空間 (representation space) といい，その次元を表現の次元 (dimension) という. ρ は，単射なら (すなわち $a \neq b \Longrightarrow \rho(a) \neq \rho(b)$ ならば) **忠実** (faithful) であるといわれる. 係数体が複素数の C なら複素表現，実数の R なら実表現という. 本書では，特に断わらないかぎり複素表現を考えてゆく. □

例 2.2 例 1.27 の行列は，群 C_{2v} の V $=$ R^9 上の実表現を与える. □

n 次元表現 (ρ, V) において，ベクトル空間 V の基底を $(e_1, \cdots, e_n)$ とすれば，

ρ は線形だから，$b \in \mathrm{G}$ に対して適当な複素正方行列 $R(b) = (R_{ij}(b))$ をとって

$$\rho(b)\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{n} R_{ij}(b)\boldsymbol{e}_i \qquad (j = 1, \cdots, n) \tag{2.2}$$

と書くことができる．すなわち

$$(\rho(b)\boldsymbol{e}_1, \cdots, \rho(b)\boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)R(b) \tag{2.3}$$

以後は，$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = \hat{\boldsymbol{e}}$ と略記し，(2.3) は $\rho(b)\hat{\boldsymbol{e}} = \hat{\boldsymbol{e}}R(b)$ と記す．すると (2.1) から

$$\rho(ab)\hat{\boldsymbol{e}} = \hat{\boldsymbol{e}}R(ab), \quad \rho(a)\rho(b)\hat{\boldsymbol{e}} = \rho(a)\Big[\hat{\boldsymbol{e}}R(b)\Big] = \hat{\boldsymbol{e}}R(a)R(b)$$

は互いに等しいので，$\hat{\boldsymbol{e}}$ が基底であることから

$$R(ab) = R(a)R(b) \tag{2.4}$$

が得られる．すなわち，群 G の各元 a に行列 $R(a)$ を対応させる写像は準同形である．これを，群の**行列表現** (matrix representation) とよぶ．

V のベクトル $\boldsymbol{r}$ の，基底 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ に関する成分を $(x_1, \cdots, x_n)$ とすれば

$$\boldsymbol{r} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j$$

となり，$\rho(b)$ の線形性から (2.2) により

$$\rho(b)\boldsymbol{r} = \rho(b) \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_j R_{ij}(b) \boldsymbol{e}_i$$

に変換される．これを，ベクトルの成分の変換と見て，記号 ρ を流用し

$$\rho(b) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = R(b) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

と書こう．以下では $\rho(b)(x, y, z)^{\mathrm{t}}$ とも書く．$^{\mathrm{t}}$ は転置を表わす．

群の表現行列は具体的には V の基底の選び方による．$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = \hat{\boldsymbol{e}}$ を V の一つの基底とし，一般に別の n 次元ベクトル空間 W に基底 $(\boldsymbol{f}_1, \cdots, \boldsymbol{f}_n) = \hat{\boldsymbol{f}}$ をとり，両者がある正則な行列 $\Gamma = (\gamma_{ij})$ により

$$\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \boldsymbol{f}_i \qquad (\det \Gamma \neq 0;\ j = 1, \cdots, n) \tag{2.6}$$

のように結ばれているものとする．すなわち

$$\hat{\boldsymbol{e}} = \hat{\boldsymbol{f}}\Gamma \qquad \Big(\Gamma = (\gamma_{ij})\Big).$$

これを用いて $\rho(a)\hat{\boldsymbol{e}}$ を 2 通りに計算しよう．

$$\rho(a)\hat{\boldsymbol{e}} = \hat{\boldsymbol{e}}R(a) = \hat{\boldsymbol{f}}\Gamma R(a)$$

は，また基底 $\hat{\boldsymbol{f}}$ に関する $\rho(a)$ の行列表現を $S(a)$ とすれば

$$\rho(a)\hat{\boldsymbol{e}} = \rho(a)\hat{\boldsymbol{f}}\Gamma = \hat{\boldsymbol{f}}S(a)\Gamma$$

でもあるから

$$\Gamma R(a) = S(a)\Gamma \qquad (\forall a \in \mathsf{G} \text{ に対して}) \tag{2.7}$$

が成り立つ．Γ を行列表現 R, S の**媒介行列** (intertwining matrix) *1とよぶ．一般に

定義 2.2　G の行列表現 R および S は，適当な正則行列 Γ が存在して相似変換 (2.7) で結ばれるとき互いに**同値**であるという．　□

例 2.3　z 軸のまわりの角 $\varphi = 2k\pi/n$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ の回転 a_φ のなす群 C_n を次の二つの空間で表現する．

(i)　$\mathsf{V} = \mathsf{R}^3$：$a_\varphi$ を座標軸の回転 (受動的変換) とすれば

$$\rho(a_\varphi)(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z) = (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)R(a_\varphi) \tag{2.8}$$

となる．ここに

$$R(a_\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii)　W を，水素原子の電子の 2p 状態の波動関数*2

$$\begin{aligned} u_{2,1,\pm1} &= \mp\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{\pi a_{\mathrm{B}}^3}}(x \pm \mathrm{i}y)\mathrm{e}^{-r/2a_{\mathrm{B}}}, \\ u_{2,1,0} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2\pi a_{\mathrm{B}}^3}}z\mathrm{e}^{-r/2a_{\mathrm{B}}} \end{aligned} \tag{2.9}$$

---

*1　twine=絡み合う．(2.6) で Γ が R と S で反対の側にあるので，こういう．

*2　$u_{n,l,m}$ の添字は n =主量子数，l =方位量子数，m =磁気量子数．$a_{\mathrm{B}} = 0.53 \times 10^{-10}\mathrm{m}$ は Bohr 半径．

の線形結合の全体とし，$\psi \in \mathrm{W}$に対する a_φの作用を，(2.5) の記法で

$$\Big(\sigma(a_\varphi)\psi\Big)(x,y,z) = \psi\Big(R(a_\varphi)^{-1}(x,y,z)^{\mathrm{t}}\Big) \tag{2.10}$$

と定める．すなわち，座標軸を回転した後の新しい波動関数$\sigma\psi$が新しい座標系の位置ベクトル (x,y,z) の点 P でとる値は，その同じ点 P (古い座標系では位置ベクトル $R(a_\varphi)^{-1}(x,y,z)^{\mathrm{t}}$ で表わされていた) で古い関数ψがとった値に等しいとする．空間 R^3にある波動は少しも動かさないのであって，空間に張った座標系の網目をずらしたので各点の座標が変わり関数も変わったように見える (図 2.1)，ということである (受動的変換)．これは表現になっている．実際，a_ϕの変換をした波動関数

$$\psi'(x,y,z) = \Big(\sigma(a_\varphi)\psi\Big)(x,y,z) = \psi\Big(R(a_\varphi)^{-1}(x,y,z)^{\mathrm{t}}\Big)$$

を，さらに $a_{\phi'}$で変換すると

$$\begin{aligned}\Big(\sigma(a_{\varphi'})\psi'\Big)(x,y,z) &= \psi'\Big(R(a_{\varphi'})^{-1}(x,y,z)^{\mathrm{t}}\Big)\\ &= \psi\Big(R(a_\varphi)^{-1}R(a_{\varphi'})^{-1}(x,y,z)^{\mathrm{t}}\Big)\end{aligned}$$

となることから，任意のψに対して

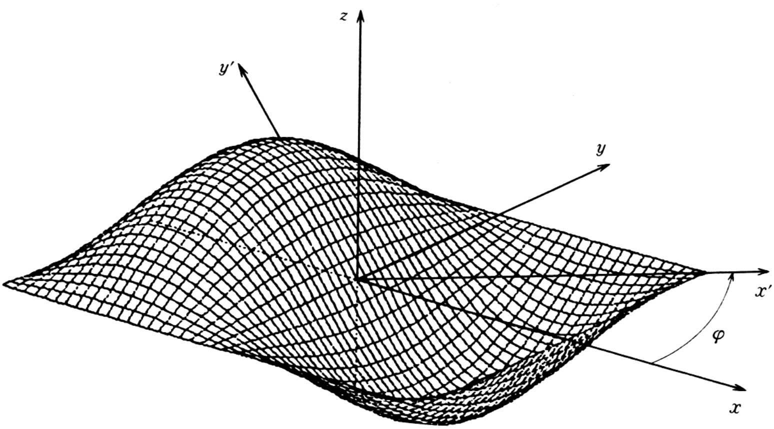


図 2.1　波動は動かさずに，座標軸を回転する．3次元空間で複素数値をとる (2.9) の波動を描くのは難しいので，模式的に示す．

$$\Big(\sigma(a_{\varphi'})\sigma(a_\varphi)\psi\Big)(x,y,z) = \psi\Big(R([a_{\varphi'}\,a_\varphi])^{-1}(x,y,z)^{\mathrm{t}}\Big)$$
$$= \Big(R(a_{\varphi'}\,a_\varphi)\psi\Big)(x,y,z)$$

が得られる．すなわち，$\sigma(a_{\varphi'})\sigma(a_\varphi) = \sigma(a_{\varphi'}\,a_\varphi)$．

(2.10) により，水素原子の 2p 状態の基底 (2.9) は

$$\sigma(a_\varphi)(u_{2,1,1}, u_{2,1,-1}, u_{2,1,0})$$
$$= (u_{2,1,1}, u_{2,1,-1}, u_{2,1,0})\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

に変わる．(2.8) の行列 R_φ と，(2.11) の行列 S_φ は，それぞれ回転の表現行列になっており，

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

が，それらを (2.7) のように媒介する． □

さて，V のベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の間に内積 $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle$ が定義されていて，次の性質をもつとしよう．そのとき V を内積空間という：

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \geqq 0 \qquad (\text{等号は } \boldsymbol{v} = 0 \text{ のとき}), \\ &\langle \boldsymbol{v}, \alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \alpha_2\boldsymbol{w}_2\rangle = \alpha_1\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1\rangle + \alpha_2\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2\rangle, \\ &\langle \beta_1\boldsymbol{v}_1 + \beta_2\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}\rangle = \bar{\beta}_1\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}\rangle + \bar{\beta}_2\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}\rangle. \end{aligned} \tag{2.13}$$

ここに $^-$ は複素共役を表わす．V から V への線形変換で，V の内積を保存し全射であるものを**ユニタリ変換** (unitary transformation) という．これは内積の保存により単射である．V の正規直交基底 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ によるその行列表示 U は

$$U^\dagger U = I \tag{2.14}$$

をみたす．ただし，† は行列の Hermite 共役を表わす．逆に，行列表示が (2.14) をみたす表現はユニタリである[*3]．

*3 U が無限次元の行列の場合には，全射であることをいうのに $UU^\dagger = I$ の条件を加える必要がある．有限次元の場合には (2.14) から $U^{-1} = U^\dagger$ がでるので，その必要がない．

定義 2.3 群 G の，内積空間 V 上の表現 ρ で，すべての $\rho(x)$ $(x \in \mathsf{G})$ がユニタリ変換であるものを**ユニタリ表現** (unitary representation) という． □

ユニタリ表現においては

$$\rho(x^{-1}) = \rho(x)^{-1} = \rho(x)^{\dagger} \qquad (\forall x \in \mathsf{G}) \tag{2.15}$$

が成り立つ．有限群の表現の特質として

定理 2.1 有限群のどんな表現もユニタリ表現に同値である．

［証明］ 与えられた表現 (ρ, V) の表現空間 V に基底 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ を入れて，任意の元 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathsf{V}$の展開

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i \boldsymbol{e}_i$$

の係数により内積

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i w_i \tag{2.16}$$

を定義する．これが内積に要求される (2.13) の性質をもつことは容易に確かめられる．この内積を用いて，新しい内積

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \sum_{a \in \mathsf{G}} \Big(\rho(a)\boldsymbol{v}, \rho(a)\boldsymbol{w} \Big) \tag{2.17}$$

を定義し，V の (2.16) をこれに換えた空間を V′とする．(2.17) も内積に要求される上記の性質をもつ．(2.13) の第 1 の性質 (正値性) を検証しておこう．$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geqq 0$ は明らか．もし $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ なら

$$\sum_{a \in \mathsf{G}} \Big(\rho(a)\boldsymbol{v}, \rho(a)\boldsymbol{v} \Big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Big(\rho(a)\boldsymbol{v}, \rho(a)\boldsymbol{v} \Big) = 0 \quad (\forall a \in \mathsf{G})$$

となり，$a = e$ にとれば $\boldsymbol{v} = 0$. よって，

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{v} = 0.$$

この内積 (2.17) に関して ρ はユニタリである．実際，$\rho(a)\rho(b) = \rho(ab)$ で，a が G 上をくまなく動けば ab もくまなく動くから

$$\langle \rho(b)\boldsymbol{v}, \rho(b)\boldsymbol{w} \rangle = \sum_{a \in \mathsf{G}} \Big(\rho(a)\rho(b)\boldsymbol{v}, \rho(a)\rho(b)\boldsymbol{w} \Big) = \sum_{c \in \mathsf{G}} (\rho(c)\boldsymbol{v}, \rho(c)\boldsymbol{w})$$

となり，

$$\langle \rho(b)\boldsymbol{v}, \rho(b)\boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \qquad (\forall b \in \mathsf{G},\ \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathsf{V} \text{ に対して}) \tag{2.18}$$

が知れる．このことを内積 (2.17) は群の作用で不変 (group-invariant) であると言い表わす．V'に内積 (2.17) による正規直交基底を入れればρの表現行列はユニタリになるが，その基底は一般にVの$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$とは異なる．それでも，基底である以上，一方から他方に正則な行列Γで媒介されるから，表現(ρ, V)の表現行列Rと(ρ, V')のユニタリ表現行列Uは相似変換$U = \Gamma R \Gamma^{-1}$でむすばれ，同値である． ∎

例 2.4 次の行列は (1.9) と同形の関係をみたし二面体群 D_4の表現をつくる．この表現はユニタリでない：

$$R(a) = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \quad R(b) = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

新しい内積 (2.17) に応ずる正規直交基底を得るため，基底

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から$\rho(a)\boldsymbol{e}_k = R(a)\boldsymbol{e}_k$を計算する (表 2.1)： これから，古い基底の新しい —— 群の作用で不変な —— 内積 (2.17) を計算すると

$$\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle = 300, \quad \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 \rangle = 600, \quad \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \rangle = -420$$

となる．新しい内積に対する直交基底を，Schmidt の直交化により

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{1}{N_1}\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{N_2}\left(\boldsymbol{e}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle}\boldsymbol{e}_1\right)$$

としよう．ここに$\langle \boldsymbol{f}_k, \boldsymbol{f}_k \rangle = 1 \ (k = 1, 2)$とする規格化定数は

$$N_1^2 = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle, \quad N_2^2 = \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 \rangle - \frac{|\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle|^2}{\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle}$$

表 2.1

g	e	a	a^2	a^3	b	ba	ba^2	ba^3
$\rho(g)\boldsymbol{e}_1$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$
$\rho(g)\boldsymbol{e}_2$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -10 \\ -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

からきまり，いま，$N_1=\sqrt{300}$, $N_2=\sqrt{12}$である．逆に解けば

$$\boldsymbol{e}_1=N_1\boldsymbol{f}_1,\quad \boldsymbol{e}_2=N_2(c\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2)\quad \left(c=\frac{N_1}{N_2}\frac{\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\rangle}{\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1\rangle}\right)$$

となり，$c=-7$．媒介行列で書けば $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2)\Gamma$．ここに

$$\Gamma=\begin{pmatrix} N_1 & cN_2 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix},\quad \Gamma^{-1}=\frac{1}{N_1N_2}\begin{pmatrix} N_2 & -cN_2 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}.$$

そこで，新しい表現行列 $U(g)=\Gamma R(g)\Gamma^{-1}$ は $R(g)=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ に対し

$$U(g)=\begin{pmatrix} \alpha+\gamma cq & (\delta-\alpha)c+\beta q^{-1}-\gamma c^2 q \\ \gamma q & \delta-\gamma cq \end{pmatrix}\quad \left(q=\frac{N_2}{N_1}\right)$$

となる．具体的には

$$U(a)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad U(b)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

であり，これらから作られる他の $U(g)$ $(g\in \mathrm{D}_4)$ とともに確かにユニタリになっている．　□

有限群 G の上で定義された複素数値関数の全体を $C(\mathsf{G})$ とし，その上での G の表現を考えよう．$C(\mathsf{G})$ は $f,g\in C(\mathsf{G})$ の和 $f+g$ および複素数 α 倍を

$$(f+g)(a)=f(a)+g(a),\quad (\alpha f)(a)=\alpha f(a)\qquad (\forall a\in\mathsf{G})$$

によって定義すれば線形空間になる．すなわち，$f+g$ は $a\in\mathsf{G}$ で値 $f(a)+g(a)$ をとる関数，αf は値 $\alpha f(a)$ をとる関数と定義する．G の各元 h ごとに関数

$$\delta_h(a)=\begin{cases} 1 & (a=h\text{ のとき}) \\ 0 & (a\neq h\text{ のとき}) \end{cases}\tag{2.19}$$

を定義すれば，$\{\delta_h\}_{h\in\mathsf{G}}$ は線形空間 $C(\mathsf{G})$ の基底になる．したがって，$C(\mathsf{G})$ の次元は群 G の位数 (元の個数) に等しい．

有限群 G の上の関数 f が与えられたとき，各元 h に対して，$a\in\mathsf{G}$ においてとる値が $f(h^{-1}a)$ であるような新しい関数 f_h を定義する．その上で f を $C(\mathsf{G})$ 上に動かすと $f\mapsto f_h$ という写像が h ごとに定まる．これを

$$\rho(h)f = f_h$$

と書こう．$\rho(h)$ は $C(\mathsf{G})$ における線形変換であり，定義を書き下した

$$\Big(\rho(h)f\Big)(a) = f(h^{-1}a) \qquad (\forall f \in C(\mathsf{G}),\ \forall a \in \mathsf{G}) \tag{2.20}$$

から分かるように全単射であって，さらに

$$\Big(\rho(g)\rho(h)f\Big)(a) = f(h^{-1}g^{-1}a) = f\Big((gh)^{-1}a\Big) = \Big(\rho(gh)f\Big)(a)$$

の計算が示すとおり，写像 $\rho : h \to \rho(h)$ は G の $C(\mathsf{G})$ 上の表現になっている．そこで

定義 2.4 有限群 G の各元 h に対して (2.20) によって定まる $C(\mathsf{G})$ 上の線形変換 $\rho(h)$ $(h \in \mathsf{G})$ の与える G の表現 σ を**左正則表現** (left regular representation) という．同様にして

$$\Big(\sigma(h)f\Big)(a) = f(ah) \qquad (\forall f \in C(\mathsf{G}),\ \forall a \in \mathsf{G}) \tag{2.21}$$

から定まる線形変換 $\sigma(h)$ $(h \in \mathsf{G})$ による表現を G の**右正則表現**とよぶ． □

簡単な計算から次の公式が得られる：

$$\rho(h)\delta_a = \delta_{ha}, \quad \sigma(h)\delta_a = \delta_{ah}. \tag{2.22}$$

定理 2.2 有限群 G の左，右の正則表現は，ともに忠実で，互いに同値である．

［証明］ 左正則表現が忠実なこと：h_1 と h_2 に対して $\rho(h_1) = \rho(h_2)$ になったとすれば，$\rho(h_1 h_2^{-1}) = I$ となるから (2.20) により $h_2 h_1^{-1} a = a$ が任意の $a \in \mathsf{G}$ に対してなりたつ．これは $h_1 = h_2$ のときに限る．右正則表現に対する証明も同様．

左，右の表現が同値なこと：(2.6) の媒介行列を構成する．任意の $f \in C(\mathsf{G})$ に対する

$$(\Gamma f)(a) = f(a^{-1}) \qquad (f \in C(\mathsf{G}),\ a \in \mathsf{G})$$

によって $C(\mathsf{G}) \longrightarrow C(\mathsf{G})$ の写像 Γ を定義すれば，これは全単射で

$$\Big\{\Gamma\Big(\rho(h)f\Big)\Big\}(a) = \Big(\rho(h)f\Big)(a^{-1}) = f(h^{-1}a^{-1}),$$

$$\Big\{\sigma(h)\Big(\Gamma f\Big)\Big\}(a) = (\Gamma f)(ah) = f\Big((ah)^{-1}\Big) = f(h^{-1}a^{-1})$$

が任意の $a \in \mathsf{G}$ で成り立ち，(2.7) に当たる $\Gamma\rho(h) = \sigma(h)\Gamma$ $(\forall h \in \mathsf{G})$ を得

る. ∎

四元群 V (例 1.2) の元 a は群 $\mathsf{G} = \{e, a, b, c\}$ に作用し $ae = a$, $aa = e$, $ab = c$, $ac = b$ のように元の置換を引きおこす. 他の元でも同じ. これは有限群で一般にいえることである. 対称群は元来, 置換の群である. もっと広く変換群 (§1.5) を考えて

定義 2.5 有限群 G は, ある有限集合 X に作用する変換群であるとする. X 上の複素数値関数の全体 $C(\mathsf{X})$ の上に

$$\Big(\rho(h)f\Big)(a) = f(h^{-1}a) \qquad (h \in \mathsf{G},\ a \in \mathsf{X})$$

によって定義される G の表現 $(\rho, C(\mathsf{X}))$ を G の X に対応する**置換表現** (permutation representation) という. (2.10) は, この定義の X が有限集合でない場合への拡張になっている. □

§2.2 既約表現

(ρ, V) を群 G の表現とする. V の線形部分空間 U は, 条件

$$\boldsymbol{u} \in \mathsf{U} \quad \Longrightarrow \quad \rho(a)\boldsymbol{u} \in \mathsf{U} \qquad (\forall a \in \mathsf{G}) \tag{2.23}$$

をみたすとき, ρ 不変 (ρ-invariant) であるという.

例 2.5 正則な三角行列のつくる群

$$\mathsf{G} = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \;\middle|\; \det g \neq 0 \right\} \subset \mathrm{GL}(n, \mathsf{C}) \tag{2.24}$$

ここに, m, n を正の整数とし, A を $m \times m$ の, Cを $(n-m) \times (n-m)$ の, B を $m \times (n-m)$ の行列とする. 積は

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}, \quad g' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ O & C' \end{pmatrix}$$

に対し

$$gg' = \begin{pmatrix} AA' & AB' + BC' \\ O & CC' \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

逆は，$\det g = \det A \det C \neq 0$ に注意して

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

で与えられる．G は自身の C^n 上の表現 ρ と見ることができる．いま

$$\mathsf{U}_m = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \middle| u_k \in \mathsf{C} \right\}, \quad \mathsf{V}_{n-m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{m+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \middle| v_k \in \mathsf{C} \right\} \tag{2.27}$$

とすれば，それぞれは C^n の線形部分空間をなす．群 (2.24) に対して $\{0\}$ と U_m は ρ 不変であるが，V_{n-m} はそうでない[*4]． □

定義 2.6 群の表現 (ρ, V) は，不変な部分空間が全空間 V と $\{0\}$ のみであるとき**既約** (irreducible)，そうでないとき**可約** (reducible) であるという． □

(ρ, V) が群 G の可約な表現であるとき，U を全空間でも $\{0\}$ でもない不変部分空間とすれば，ρ の定義域を U に制限した ρ_{U} は，G の表現 $(\rho_{\mathsf{U}}, \mathsf{U})$ を与える．これを G の**部分表現**とよぶ．これは既約とは限らないが，特に既約の場合 U を既約な部分空間という．いいかえれば，U に真に含まれる不変部分空間がない場合である．例 2.5 の U_m は既約な部分空間である．

群の表現 (ρ, V) において U が既約な部分空間であるとしよう．U に基底 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$ をとり，不足を補って

$$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$$

を全空間 V の基底とする．これによる $\rho(a)$ $(a \in \mathsf{G})$ の行列表示は

$$R(a) = \begin{pmatrix} R^{(1)}(a) & * \\ O & R^{(2)}(a) \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

$$R^{(1)}(a) \in \mathrm{GL}(m, \mathsf{C}),$$
$$R^{(2)}(a) \in \mathrm{GL}(n-m, \mathsf{C})$$

---

*4 $\{0\}$ は零ベクトルのみからなる部分空間．

の形となる．$*$の部分は，いま特に考慮する必要がない．特に，表現 (ρ, V) の行列表示が

$$R(a) = \begin{pmatrix} R^{(1)}(a) & & & O \\ & R^{(2)}(a) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & R^{(s)}(a) \end{pmatrix} \qquad (a \in \mathsf{G}) \qquad (2.29)$$

の形にできて，さらにどの $\{R^{(k)}(a)\}_{a \in \mathsf{G}}$ $(k = 1, \cdots, s)$ が定める部分表現も既約であるようにできるとき，この表現は**完全可約** (completely reducible) であるという．

このとき，表現空間 V は ρ 不変な部分空間 $\mathsf{V}_1, \cdots, \mathsf{V}_s$ の直和 (direct sum) *5

$$\mathsf{V} = \mathsf{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{V}_s \qquad (2.30)$$

である．各部分空間における部分表現を $\rho_1, \cdots, \rho_s$ としよう．このとき ρ は，これらの部分表現の直和であるといい

$$\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_s \qquad (2.31)$$

と書く．各 ρ_k を ρ の既約成分という．

定理 2.3 (ρ, V) を群の表現とする．V の任意の ρ 不変な部分空間 U に対し，同じく ρ 不変な部分空間 U' が存在して $\mathsf{V} = \mathsf{U} \oplus \mathsf{U}'$ となるならば，表現 (ρ, V) は完全可約である． □

証明は例 2.5 から推察されたい．この定理と次の定理からユニタリ表現は完全可約であることが分かる．

定理 2.4 (ρ, V) を群 G のユニタリ表現とする．V の線形部分空間 U が ρ 不変なら，その直交補空間 $\mathsf{U}^{\perp}$ も ρ 不変である *6．

[証明] 任意の $a \in \mathsf{G}$ に対して $\rho(a)$ はユニタリ変換で表わされ内積を保存するので

$$\langle \boldsymbol{u}, \rho(a)\boldsymbol{u}' \rangle = \langle \rho(a^{-1})\boldsymbol{u}, \rho(a^{-1})\rho(a)\boldsymbol{u}' \rangle = \langle \rho(a^{-1})\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \rangle$$

---

*5 $\forall \boldsymbol{v} \in \mathsf{V}$ が $\boldsymbol{v}_1 \in \mathsf{V}_1$，$\boldsymbol{v}_2 \in \mathsf{V}_2$ を用いて $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ の形に表わせるとき $\mathsf{V} = \mathsf{V}_1 + \mathsf{V}_2$ と書き，特に $\mathsf{V}_1 \cap \mathsf{V}_2 = \{0\}$ の場合 $\mathsf{V} = \mathsf{V}_1 \oplus \mathsf{V}_2$ と書いて，V は V_1 と V_2 との直和であるという．もっと多くの部分空間の直和も同様に定義される．

*6 $\mathsf{U}^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in \mathsf{V} | \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0,\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathsf{U}\}$

となる．$\boldsymbol{u} \in \mathsf{U}$, $\boldsymbol{u}' \in \mathsf{U}^{\perp}$ とすれば，U が ρ 不変であり，それに $\mathsf{U}^{\perp}$ が直交することから，最右辺は 0 となるので $\langle \boldsymbol{u}, \rho(a)\boldsymbol{u}' \rangle = 0$．よって

$$\boldsymbol{u}' \in \mathsf{U}^{\perp} \quad \Longrightarrow \quad \rho(a)\boldsymbol{u}' \in \mathsf{U}^{\perp} \quad (\forall a \in \mathsf{G}).$$ ∎

上に，ユニタリ表現は完全可約なことを注意した．他の任意の表現は定理 2.1 によってユニタリ表現に引き直せるから

定理 2.5 有限群のどの表現も完全可約である． □

後に見るように，量子力学的な系のエネルギーの固有状態や，素粒子の結合状態をすべて求める問題は，適当な群の既約表現をすべて求めることで解かれる．その際，次の定理が基本的である．

定理 2.6 (Schur の補題 1) (ρ, V) および (σ, W) を群 G の既約表現とするとき，V から W への線形写像 Γ が

$$\Gamma \rho(a) = \sigma(a) \Gamma \qquad (\forall a \in \mathsf{G}) \tag{2.32}$$

をみたすなら，Γ は 0 に等しいか，または全単射である． □

後者の場合，Γ は媒介写像になっており二つの表現は同値である (定義 2.2)．

［証明］ $\Gamma \neq 0$ なら全単射であることを示せばよい．

単射である：$\mathrm{Ker}\,\Gamma = \{\boldsymbol{v} \in \mathsf{V} | \Gamma \boldsymbol{v} = 0\}$ が $\{0\}$ であることをいう．(2.32) から

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}\,\Gamma \quad &\Longrightarrow \quad \Gamma \rho(a)\boldsymbol{v} = \sigma(a)\Gamma \boldsymbol{v} = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \rho(a)\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}\,\Gamma \qquad (\forall a \in \mathsf{G}) \end{aligned}$$

となるので $\mathrm{Ker}\,\Gamma$ は ρ 不変である．よって，(ρ, V) の既約性から $\mathrm{Ker}\,\Gamma$ は V 全体か $\{0\}$ であるが，$\Gamma \neq 0$ なので前者はあり得ない．

全射である：$\mathrm{Im}\,\Gamma = \{\Gamma \boldsymbol{v} | \boldsymbol{v} \in \mathsf{V}\}$ が W 全体であることをいう．$\rho(a)$ は V を不変にするから

$$\sigma(a)\Gamma \boldsymbol{v} = \Gamma \rho(a) \boldsymbol{v} \in \mathrm{Im}\ \Gamma.$$

すなわち，$\mathrm{Im}\,\Gamma$ は σ 不変である．よって，(σ, W) の既約性から $\mathrm{Im}\,\Gamma$ は W 全体か $\{0\}$ でなければならない．しかし，$\Gamma \neq 0$ なので後者はあり得ない． ∎

定理 2.7 (Schur の補題 2) 表現 (ρ, V) が既約であることは，V における任意の線形変換 T に対し

$$T\rho(a) = \rho(a)T \quad (\forall a \in \mathsf{G}) \quad \Longrightarrow \quad T = cI \quad (\exists c \in \mathsf{C}) \tag{2.33}$$

が成り立つことと同値である．

［証明］ ρ は既約 $\Longrightarrow$ (2.33)：T の固有値の一つを c とすれば

$$(T - cI)\rho(a) = \rho(a)(T - cI) \qquad (\forall a \in \mathsf{G})$$

となり，ρ の既約性から Schur の補題 1 により $T - cI = 0$.

(2.33) $\Longrightarrow$ ρ は既約：これを示す代わりに，対偶，すなわち

ρは既約でない $\Longrightarrow$

$\rho(a)$ $(\forall a \in \mathsf{G})$ と可換な，cI の形でない線形変換が存在する

を示そう．ρ は既約でないから完全可約で，V は二つの不変部分空間 $\mathsf{U}_1, \mathsf{U}_2$の直和である．いま T を V から U_1への射影演算子とすれば，これは cI の形ではないが，任意の $\boldsymbol{v} \in \mathsf{V}$を $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_1 \in \mathsf{U}_1$, $\boldsymbol{u}_2 \in \mathsf{U}_2$と書き

$$\rho(a)T(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = \rho(a)\boldsymbol{u}_1,$$
$$T\rho(a)(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = T\Big(\rho(a)\boldsymbol{u}_1 + \rho(a)\boldsymbol{u}_2\Big) = \rho(a)\boldsymbol{u}_1$$

のように計算して $\rho(a)T = T\rho(a)$ $(\forall a \in \mathsf{G})$. ∎

この定理の T として群の $\rho(b)$ $(\forall b \in \mathsf{G})$ をとれば，ただちに

定理 2.8 可換群の既約表現は 1 次元である． □

例 2.6 正 n 辺形 P_nを一定の向きに回して自身に重ねる回転の全体は位数 n の巡回群 C_nをなす (例 1.5)．定理 2.8 により，C_nの既約表現はすべて 1 次元であり，$\sigma(a^n) = \sigma(a)^n = 1$ から，次式で $k = 0, 1, \cdots, n-1$ とした n 個がある：

$$R^{(k)}(a^q) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kq/n} \qquad (q = 0, 1, \cdots, n-1).$$ □

定理からは，また同値でない表現行列の“直交性”が導かれる．すなわち

定理 2.9 $R(a) = (R_{ij})$, $S(a) = (S_{kl})$ を有限群 G の既約表現行列とすれば

$$\sum_{a \in \mathsf{G}} S_{ij}(a) R_{kl}(a^{-1}) = \begin{cases} 0 & (R\text{と }S\text{とが同値でないとき}) \\ \dfrac{|\mathsf{G}|}{\deg R}\delta_{il}\delta_{jk} & (R = S\text{ のとき}) \end{cases} \tag{2.34}$$

が成り立つ．ここに，$|\mathsf{G}|$ は群の位数，$\deg R$ は表現行列の大きさである．

［証明］ 定理の R, S は，それぞれ表現 (ρ, V), (σ, W) の表現行列であるとする．A を V から W への任意の線形写像として

$$B = \sum_{a \in \mathsf{G}} \sigma(a) A \rho(a^{-1}) \tag{2.35}$$

とおけば，これは V から W への線形写像で $B\rho(b)=\sigma(b)B$ $(\forall b\in \mathsf{G})$ がなりたつ．したがって，Schur の補題 1 により二つの表現が同値でない場合には $B=0$ となる．二つが同一の表現のときには，B は恒等写像の定数倍となるから，その定数を λ とし，(2.35) を表現行列で書いてトレースをとれば，右辺は $|\mathsf{G}|\mathrm{tr}\,A$ を，左辺は $\lambda\dim\mathsf{V}$を与える．よって

$$\sum_{a\in\mathsf{G}}\sigma(a)A\rho(a^{-1})=\frac{|\mathsf{G}|}{\dim\mathsf{V}}\mathrm{tr}A\cdot I_{\mathsf{V}}. \tag{2.36}$$

ここで ρ,σ の行列表現を R,S とし，その際の基底に関して A が E_{jk}となったとして*7 (2.36) の行列表示の i,l 要素をとれば (2.34) の後半が得られる．前半は，さきに注意した $B=0$ から得られる． ∎

G が位数 n の有限群のとき，その上の複素数値関数の全体 $C(\mathsf{G})$ は n 次元複素線形空間をなす (定義 2.4 の上)．そこに，内積

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{|\mathsf{G}|}\sum_{a\in\mathsf{G}}\overline{f(a)}g(a)\qquad\Big(f,g\in C(\mathsf{G})\Big) \tag{2.37}$$

を入れよう．そうすると $\{\sqrt{n}\delta_h\}_{h\in\mathsf{G}}$は完全正規直交基底をなし，G の正則表現はユニタリ表現になる．定理 2.9 をユニタリ表現に対して書けば

定理 2.10 $U=(u_{ij})$, $V=(v_{kl})$ を G の既約ユニタリ表現行列とすれば

$$\langle u_{ij},v_{kl}\rangle=\begin{cases}0 & (U\text{と }V\text{とは同値でない})\\ \dfrac{1}{\deg U}\delta_{il}\delta_{jk} & (U=V\text{の場合})\end{cases} \tag{2.38}$$

□

例 2.7 例 2.6 の巡回群の表現 $R^{(k)}$ と $R^{(l)}$について (2.38) を書けば，確かに

$$\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\overline{R^{(k)}(a^q)}R^{(l)}(a^q)=\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kq/n}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}lq/n}=\delta_{kl}.$$

□

同値な表現をまとめて**表現類**という．各表現類から任意に一つずつ表現をとり，その全体を**既約表現の代表系**とよぶ．その大きさ m は既約表現類の総数に等しい．代表系はユニタリ表現にとることもできる．その行列表現を $U^{(1)},\cdots,U^{(m)}$ とし，$U^{(k)}=(U_{ij}^{(k)})$ とすれば，上の定理は関数系

$$\left\{\sqrt{d_k}U_{ij}^{(k)}\mid i,j=1,\cdots,d_k;\ k=1,\cdots,m\right\} \tag{2.39}$$

---

*7 E_{jk} は j,k 要素が 1 で他は 0 の行列．

が $C(\mathsf{G})$ の正規直交系をなすことを示す．ここに $d_k = \deg U^{(k)}$．したがって

定理 2.11　G の既約表現類の総数は G の位数を越えない．　□

定理 2.12 (Peter–Weyl の定理)　(2.39) は $C(\mathsf{G})$ の完全正規直交系をなす．

［証明］ 完全性だけ示せばよい．G の右正則表現をとる．これは完全可約だから，表現空間 $C(\mathsf{G})$ を既約分解すると，その任意の一つの既約な部分表現 (σ_m, V_m) は既約ユニタリ表現の代表系のどれかと同値である．それを $U^{(l)}$, $l = l(m)$ とすれば，V_mの適当な直交基底 $(f_1, \cdots, f_{d_l})$ をとって，それによる σ_mの行列表示が $(U_{ij}^{(l)})$ となるようにできる．すなわち

$$\Big(\sigma_m(a) f_j\Big)(h) = \sum_{i=1}^{d_l} U_{ij}^{(l)}(a) f_i(h).$$

ここで $h = e$ にとる．右正則表現の定義から左辺は $f_j(a)$ となり，これが右辺で (2.39) の $U_{ij}^{(l)}(a)$ の線形結合で表わされている．すべての V_mで同じことがいえるから，$C(\mathsf{G})$ の任意の元が (2.39) の線形結合で表わされる．　∎

例 2.8　例 2.6 に示した巡回群の既約表現は，それぞれが既約表現類をなし，したがって定理 2.11 が等号で成り立つ例になる．　□

例 2.9　群 G が座標変換

$$x_l' = \Big(\rho(a)x\Big)_l = \sum_k R_{kl}(a) x_k \qquad (a \in \mathsf{G}) \tag{2.40}$$

を引き起こすとする．すなわち，どの点 P の座標 $\boldsymbol{r} = (x_1, \cdots, x_N)$ も，この式にしたがって $\boldsymbol{r}'$に変わるとする．これに伴う量子力学の波動関数の変換 (2.10) を，ここでは量子力学の演算子 $\hat{R}$ を用いて

$$(\hat{R}(a)\psi)(\boldsymbol{r}) = \psi(\rho(a)^{-1}\boldsymbol{r}) \tag{2.41}$$

と書こう．このとき，運動量演算子 $\hat{p}_l = -\mathrm{i}\hbar\partial/\partial x_l$について

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(\hat{R}\psi)(x) = \sum_k R_{kl}(a)\frac{\partial}{\partial x_k}\psi(\rho(a)^{-1}x) = \Big(\hat{R}\sum_k R_{kl}(a)\frac{\partial}{\partial x_k}\psi\Big)(x)$$

だから

$$\hat{R}(a)^{-1}\hat{p}_l\hat{R}(a) = \sum_k R_{kl}(a)\hat{p}_k \tag{2.42}$$

となる．これが直交変換なら運動エネルギー $(1/2m)\hat{\boldsymbol{p}}^2$ は不変である．さらにポテンシアル $\hat{V}$ も —— たとえば $\sum x_k^2$の関数で —— 変わらないなら，ハミル

トニアン $\hat{\mathcal{H}} = (1/2m)\hat{\boldsymbol{p}}^2 + \hat{V}$ も不変である． □

一般に，群 G が与えられたハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}$ を不変にする場合を考えよう:

$$\hat{R}(a)^{-1}\hat{\mathcal{H}}\hat{R}(a) = \hat{\mathcal{H}} \qquad (\forall a \in \mathsf{G}). \tag{2.43}$$

もし，u が $\hat{\mathcal{H}}$ の固有値 E の固有関数ならば，すなわち $\hat{\mathcal{H}}u = Eu$ が成り立つなら，$\hat{R}(a)u$ も同じ固有値の固有関数である．実際,

$$\hat{\mathcal{H}}\hat{R}u = \hat{R}(\hat{R}^{-1}\hat{\mathcal{H}}\hat{R})u = \hat{R}(Eu) = E(\hat{R}u)$$

となる．そこで，$\hat{\mathcal{H}}$ の固有値 E の固有関数で互いに 1 次独立なものの全体を $\{u_\nu | \nu = 1, \cdots, d\}$ としよう．$d > 1$ のとき，固有値 E は d 重に**縮退**しているという．群 G は縮退している固有関数の間に 1 次変換を引きおこす．一般に，これは G の既約表現を与えるであろう．

いや，$\{u_\nu | \nu = 1, \cdots, d\}$ が二つ以上の組に分かれ，それぞれの中でだけ変換がおこる —— それぞれが既約表現を与える —— ということも論理的には排除できない．これは**偶然縮退** (accidental degeneracy) の場合とよばれる．二つ以上の既約表現のエネルギー固有値が偶然に一致したと見るのである．$\hat{\mathcal{H}}$ を少しでも変えれば，それらのエネルギー値は分離するだろう．

例 2.10 波動関数 $\{v_1^{(\rho)}, \cdots, v_{f_\rho}^{(\rho)}\}$ による群 G のユニタリな既約表現が与えられたとする：

$$\hat{R}(a)v_l^{(\rho)} = \sum_{k=1}^{f_\rho} R_{kl}^{(\rho)}(a)v_k^{(\rho)}.$$

ここに，ρ は既約表現を区別し，f_ρ は既約表現の次元である．この系の物理量 $\hat{A}$ が G で不変ならば，$\langle\ ,\ \rangle$ を波動関数の内積として

$$\langle v_j^{(\rho)}, \hat{A}v_k^{(\sigma)}\rangle = \frac{\delta_{\rho\sigma}}{f_\rho}\delta_{jk}\sum_{l=1}^{f_\rho}\langle v_l^{(\rho)}, \hat{A}v_l^{(\rho)}\rangle \tag{2.44}$$

が成り立つ．右辺は δ_{jk} を別にすれば j, k によらない．実際

$$\begin{aligned}\langle v_j^{(\rho)}, \hat{A}v_k^{(\sigma)}\rangle &= \langle v_j^{(\rho)}, \hat{R}(a)^{-1}\hat{A}\hat{R}(a)v_k^{(\sigma)}\rangle = \langle \hat{R}(a)v_j^{(\rho)}, \hat{A}\hat{R}(a)v_k^{(\sigma)}\rangle \\ &= \sum_{l=1}^{f_\rho}\sum_{m=1}^{f_\sigma}\overline{R_{lj}^{(\rho)}(a)}R_{mk}^{(\sigma)}(a)\langle v_l^{(\rho)}, \hat{A}v_m^{(\sigma)}\rangle\end{aligned}$$

となるが，これは本来 a によらないので，G 上で平均すると，(2.34) が使えて (2.44) が得られる． □

§2.3 表現のテンソル積

例 2.9 を一般化して，ハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}_1$ と境界条件が座標変換の群 G に関し不変であるとしよう．そして，固有値問題 $\hat{\mathcal{H}}_1 u_n = E_1 u_n$ の，固有値 E_1 の解が d_1 重に縮退しているとする $(n = 1, \cdots, d_1)$．すると，変換 $a_1 \in \mathrm{G}$ によって固有関数は一般に

$$\rho(a_1)u_n(\boldsymbol{r}_1) = \sum_{n'=1}^{d} R^{(\rho)}_{n'n}(a_1)u_{n'}(\boldsymbol{r}_1) \qquad (a_1 \in \mathrm{G}_1)$$

のように変わる．G の表現 ρ は既約とし，その表現行列を $R^{(\rho)} = (R^{(\rho)}_{n'n})$ とした．

いま，もう一つ粒子があって，同じ群 G で不変な $\hat{\mathcal{H}}_2$ をもち，その固有値問題 $\hat{\mathcal{H}}_2 v_m = E_2 v_m$ の解が d_2 重に縮退していて，G の変換により既約表現 σ にしたがって，行列 $R^{(\sigma)} = (R^{(\sigma)}_{m'm})$ で

$$\sigma(a_2)v_m(\boldsymbol{r}_2) = \sum_{m'=1}^{d_2} R^{(\sigma)}_{m'm}(a_2)u_{m'}(\boldsymbol{r}_2) \qquad (a_2 \in \mathrm{G}_2)$$

のように変換するとしよう．

二つの粒子が同じ領域にいるなどの理由から，両者を合わせて一つの系とみなすときには，ハミルトニアンは和

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_1 + \hat{\mathcal{H}}_2 \tag{2.45}$$

で（$\hat{\mathcal{H}}_k$ は $\boldsymbol{r}_k$ に関する微分とかけ算の演算子からなり和は自然に定義される），積

$$u_n(\boldsymbol{r}_1)v_m(\boldsymbol{r}_2) \qquad (n = 1, \cdots, d_1;\ m = 1, \cdots, d_2) \tag{2.46}$$

が固有関数になり，和 $E_1 + E_2$ を固有値にもつ．ただし，(2.45) の和は $\hat{\mathcal{H}}_1$ が $u_n(\boldsymbol{r}_1)$ に，$\hat{\mathcal{H}}_2$ が $v_m(\boldsymbol{r}_2)$ に作用する意味とする．そして G の変換では

$$\begin{aligned}&\rho(a_1)u_n(\boldsymbol{r}_1)\cdot\sigma(a_2)v_m(\boldsymbol{r}_2)\\&= \sum_{n'}\sum_{m'} R^{(\rho)}_{n'n}(a_1)R^{(\sigma)}_{m'm}(a_2)u_{n'}(\boldsymbol{r}_1)v_{m'}(\boldsymbol{r}_2)\end{aligned} \tag{2.47}$$

のように変換する．これは，群の直積 G × G (§1.6) の表現を与える．表現行列は

$$R^{(\rho\times\sigma)}(a_1, a_2) = \left(R^{(\rho)}_{n'n}(a_1)R^{(\sigma)}_{m'm}(a_2)\right) \tag{2.48}$$

であって, 表現空間は (2.46) を基底とする．これを**積表現** [*8]という．

表現空間の基底 (2.46) を辞書式順序に

$$u_1v_1,\cdots,u_1v_{d_2},\ u_2v_1,\cdots,u_2v_{d_2},\ \cdots\cdots,\ u_{d_1}v_1,\cdots,u_{d_1}v_{d_2} \tag{2.49}$$

と並べれば，変換行列は

$$R^{(\rho\times\sigma)}(a_1,a_2)=\begin{pmatrix} R^{(\rho)}_{11}(a_1)R^{(\sigma)}(a_2) & \cdots & R^{(\rho)}_{1d_1}(a_1)R^{(\sigma)}(a_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R^{(\rho)}_{d_11}(a_1)R^{(\sigma)}(a_2) & \cdots & R^{(\rho)}_{d_1d_1}(a_1)R^{(\sigma)}(a_2) \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

となる．これは既約である．なぜなら，すべての $(a_1,a_2)\in \mathsf{G}\times\mathsf{G}$ に関して不変な真部分空間[*9]があったとしたら，$a_2=e$ にとったとき (あるいは $a_1=e$ にとったとき) $R^{(\rho)}(a_1)$ の (あるいは $R^{(\sigma)}(a_2)$ の) 表現空間に不変な部分空間があることになり，仮定に矛盾する．しかし，二つの粒子の相互作用，たとえば

$$\hat{\mathcal{H}}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}$$

($\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$の関数の積の和で近似できる) を (2.45) に加えて，ハミルトニアンを

$$\hat{\mathcal{H}}=\hat{\mathcal{H}}_1+\hat{\mathcal{H}}_2+\hat{\mathcal{H}}_{12} \tag{2.51}$$

にとる場合，これは粒子ごとの別々の変換では不変でない．たとえば，立方体の対称性 (例 1.6) をもつ井戸型ポテンシアル $V=V(x,y,z)$ (立方体の中では $V=0$，外では $V=\text{const.}>0$) を考え

$$\hat{\mathcal{H}}_k=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_k^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_k^2}\right)+V(x_k,y_k,z_k) \qquad (k=1,2)$$

とすれば，これらは正八面体群 O で不変である．しかし，(2.51) は粒子ごとの O の別々の変換では不変でない．不変なのは両方の粒子に同じ変換 $a_1=a_2=a$ を施すときに限られる．この場合の基底は (2.46) のままであるが，表現行列は (2.50) で $a_1=a_2=a$ とした $R^{(\rho\times\sigma)}(a)$ になる．これを **テンソル積表現**とよび $\rho\otimes\sigma$ と書き，行列 (2.50) を $R^{(\rho)}(a)\otimes R^{(\sigma)}(a)$ と書き表わす．変換を制限したので，テンソル積表現はもはや既約とは限らない．この考察は $\hat{\mathcal{H}}_{12}$を摂動とし

---

*8　ここまでは二つの粒子にはたらく変換群が異なっていてもよい．

*9　空間 V に対して $\mathsf{V}_1\subseteq\mathsf{V}$となる V_1は V の部分空間とよばれる．特に$\mathsf{V}_1 \subsetneq \mathsf{V}$のとき真部分空間という．

て扱うとき役に立つ (後の §2.7(b) を参照).

例 2.11　例 2.3 の変換 a_φ は，(2.9) の三つの波動関数 (順に u_1, u_2, u_3 と書く) の間で変換をおこし，ときに -1 倍する．それでも

$$s(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = u_1(\boldsymbol{r}_1)u_2(\boldsymbol{r}_2) + u_2(\boldsymbol{r}_1)u_1(\boldsymbol{r}_2) + u_3(\boldsymbol{r}_1)u_3(\boldsymbol{r}_2) \tag{2.52}$$

の張る 1 次元部分空間は不変であり，

$$u_i(\boldsymbol{r}_1)u_j(\boldsymbol{r}_2) - \frac{1}{3}s(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.53}$$

の張る 8 次元部分空間も不変である (9 本の基底を書いたが，1 次独立ではない).　□

(2.46) を 2 組の基底のテンソル積という．これを設定するとき次の注意が必要になることがある．大きさ $\hbar/2$ のスピンの状態空間の基底は

$$e_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

の二つである．$e_\uparrow$ はスピンが上向きの状態，$e_\downarrow$ は下向きの状態をあらわす．スピンの一般の状態は，これらの線形結合であり

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

の内積を

$$\langle \chi_1 | \chi_2 \rangle = (\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1) \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

で定義する．

スピンが二つあるときの状態空間の基底は (2.46) にならって

$$u_\uparrow u_\uparrow, \quad u_\uparrow u_\downarrow, \quad u_\downarrow u_\uparrow, \quad u_\downarrow u_\downarrow \tag{2.56}$$

の四つになる．この空間の内積は

$$\langle \varphi_1\varphi_2 | \chi_1\chi_2 \rangle = \langle \varphi_1 | \chi_1 \rangle \langle \varphi_2 | \chi_2 \rangle \tag{2.57}$$

を線形性を目標に拡大して定義する．そうすると

$$\varPhi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

のノルムが 0 になる：$\langle\Phi|\Phi\rangle = 0$. したがって，(2.58) は零ベクトルとみなければならないが，基底 (2.58) は二つのスピンの状態ベクトルを並べただけで，それらの間の加法は単に形式的に + でつなぐこと以上にはできていない．そこで

$$\Phi = 0 \tag{2.59}$$

と定義する．一般的にいえば，こうなる．

定義 2.7 二つの複素線形空間 V, W の元 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ を並べた $\boldsymbol{vw}$ の全体が張る空間を V × Wとし，次の形のすべての元で張られるその部分空間を H とする．

$$(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')\boldsymbol{w} - \boldsymbol{vw} - \boldsymbol{v}'\boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}') - \boldsymbol{vw} - \boldsymbol{v}'\boldsymbol{w},$$
$$(\lambda\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} - \lambda\boldsymbol{vw}, \quad \boldsymbol{v}(\lambda\boldsymbol{w}) - \lambda\boldsymbol{vw}$$

そして商空間[*10] (V × W)/H を V と W との**テンソル積**といい，V ⊗ Wと記す．□

テンソル積表現は，このテンソル積空間の上に定義される．しかし，この問題には立ち入らない．

スピンの状態ベクトルについては，V × Wを次のようにして C^4の元とみなせば，上の問題は C^4の加法により自然に解決される．すなわち，

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \eta_1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\xi_2\\ \eta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_1\begin{pmatrix}\xi_2\\ \eta_2\end{pmatrix}\\ \eta_1\begin{pmatrix}\xi_2\\ \eta_2\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_1\xi_2\\ \xi_1\eta_2\\ \eta_1\xi_2\\ \eta_1\eta_2\end{pmatrix} \tag{2.60}$$

この処方で (2.57) が得られることは容易に確かめられる．ここで縦ベクトルの間に ⊗ をはさんだのは，定義 2.7 による空間のベクトルであることを明示するためである．これを二つのベクトルのテンソル積という．

§2.4 指標

定義 2.8 群 G の表現 (ρ, V) に対して

$$\chi^\rho(a) = \mathrm{tr}\ \rho(a) \qquad (a \in \mathsf{G}) \tag{2.61}$$

を**指標** (character) という．ρが既約のとき既約指標という． □

ρの tr は，その行列表示 R から $\mathrm{tr}\,\rho(a) = \mathrm{tr}\,R(a)$ と定義する．これは G 上の

*10 V × Wの元につき H に属する分はすべて 0 とみなす約束で得る空間．

複素数値関数である．χにつけた添字のρは省くことも多い．

例 2.12 例2.3に与えた群C_nの二つの表現の指標は等しい．

$$\chi^\rho(a_\phi) = \chi^\sigma(a_\phi) = 2\cos\phi + 1 \qquad (\phi = 2k\pi/n,\ k = 0, 1, \cdots, n-1)$$ □

例 2.13 有限群 G の正則表現の指標は

$$\chi^{\mathrm{reg}}(a) = \begin{cases} 0 & (a \neq e \text{ のとき}) \\ |\mathsf{G}| & (a = e \text{ のとき，} |\mathsf{G}| \text{ は G の位数}) \end{cases}$$

実際，ρを G の左正則表現 (定義 2.4) とすれば，基底 (2.19) に対し (2.22) から $\rho(a)\delta_g = \delta_{ag}$．よって，$a \neq e$では$\rho$の表現行列$R$は対角成分をもたず$\mathrm{tr}\, R(g) = 0$. しかし，$a = e$なら$R$の対角成分はすべて1で，$\mathrm{tr}\, R(e) = \dim C(\mathsf{G}) = |\mathsf{G}|$.

□

定理 2.13 ρおよびσを群Gの表現とするとき

(i) $\chi^\rho(e) = \deg \rho \qquad (e$ は G の単位元)

(ii) $\chi^\rho(gag^{-1}) = \chi^\rho(a) \qquad (a, g \in \mathsf{G})$

(iii) ρ と σ が同値ならば $\chi^\rho = \chi^\sigma$

(iv) $\chi^{\rho\oplus\sigma} = \chi^\rho + \chi^\sigma$

(v) $\chi^{\rho\otimes\sigma} = \chi^\rho\chi^\sigma$

(vi) $\chi^\rho(a) = \overline{\chi^\rho(a^{-1})}$

［証明］ ρ, σの表現行列を，それぞれR, Sとする．

(ii) $R(gag^{-1}) = R(g)R(a)R(g)^{-1}$からトレースの性質により明らか．(iii) $\Gamma R(a)\Gamma^{-1} = S(a)$ から (ii) と同様．(iv) (2.29) で $s = 2$ とせよ．(v) (2.50) で$a_1 = a_2$とする．(vi) 定理2.1と (2.14) から明らか． ∎

一般に G 上の関数で (ii) を満足するものを**類関数** (class function) という．

定理 2.14 (既約指標の第1直交関係) ρおよびσを群Gの既約表現とすれば

$$\langle\chi^\rho, \chi^\sigma\rangle = \begin{cases} 0 & (\rho \text{ と } \sigma \text{ が同値でないとき}) \\ 1 & (\rho \text{ と } \sigma \text{ が同値のとき}) \end{cases}$$

ここに，$\langle\ ,\ \rangle$ は $C(\mathsf{G})$ の内積で (2.37) に定義されている．

［証明］ 定理2.1によりユニタリ表現の場合に証明すればよく，定理2.9が使える． ∎

この定理により，$\rho_1,\cdots,\rho_K$が有限群 G の互いに同値でない既約表現ならば，それらの指標$\chi^1,\cdots,\chi^K$は$C(\mathsf{G})$において正規直交系をなし，1 次独立である：

$$\langle\chi^\mu,\chi^\nu\rangle=\delta_{\mu\nu}\qquad(\mu,\ \nu=1,\cdots,K)\tag{2.62}$$

G の任意の表現ρは，完全可約であるから，いくつかの既約表現$\rho^{(1)},\cdots,\rho^{(s)}$の直和$\rho=\rho^{(1)}\oplus\cdots\oplus\rho^{(s)}$の形に直せるが，右辺に同値なものがあればまとめて，$\rho^{(\mu)}$のm_μ個の直和を$m_\mu\rho^{(\mu)}$と書く：

$$\rho=m_1\rho^{(1)}\oplus\cdots\oplus m_K\rho^{(K)}.\tag{2.63}$$

m_μを$\rho^{(\mu)}$のρにおける**重複度** (multiplicity) といい，$(\rho:\rho^{(\mu)})$と書く．それは定理 2.13 (iv) と定理 2.14 により

$$(\rho:\rho^{(\mu)})=\langle\chi^{\rho^{(\mu)}},\chi^\rho\rangle\tag{2.64}$$

によって求められる．

例 2.14　巡回群$\mathrm{C}_n=\{e,a,\cdots,a^q,\cdots,a^{n-1}\}$の既約表現は$n$個あり，それぞれの指標は，例 2.6 から

$$\chi^{(\nu)}(a^q)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\nu q/n}\qquad(\nu=0,1,\cdots,n-1).$$

他方，C_nの一つの表現が例 2.3 にある：

$$R(a^q)=\begin{pmatrix}\cos\phi_q & \sin\phi_q & 0\\ -\sin\phi_q & \cos\phi_q & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad(\phi_q=2\pi q/n)$$

この表現をρ_{v}，その指標をχ_{v}とすれば[*11]

$$\chi_{\mathrm{v}}(a^q)=1+2\cos\phi_q$$

であるから

$$(\rho_{\mathrm{v}}:\rho^{(\nu)})=\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu q/n}\left[1+2\cos\frac{2\pi q}{n}\right]=\delta_{\nu,0}+\delta_{\nu,n-1}+\delta_{\nu,1}$$

となり，ρ_{v}には既約表現$\rho^{(0)},\rho^{(n-1)},\rho^{(1)}$が一つずつ含まれていることが分かる．実際，前者が後者の直和に同値なことは，例 2.3 で (2.8) と (2.11) の同値性として見たとおりである．　□

さらに次の定理があるので，指標は有限群の表現論において重要である．

定理 2.15 (同値性の判定)　有限群 G の任意の表現ρ,σが同値であるための

*11　ベクトル表現 (vector representation).

必要十分条件は $\chi^\rho = \chi^\sigma$ が成り立つことである．

［証明］ 必要なこと：定理 2.13 の (iii) に示した．十分なこと： $\chi^\rho = \chi^\sigma$ から，G の既約表現の代表系 $\rho^{(1)}, \cdots, \rho^{(K)}$ に対して

$$\langle \chi^\rho, \chi^{\rho^{(\mu)}} \rangle = \langle \chi^\sigma, \chi^{\rho^{(\mu)}} \rangle \qquad (\mu = 1, \cdots, K)$$

が成り立つので，(2.64) から $(\rho : \rho^{(\mu)}) = (\sigma : \rho^{(\mu)})$ を得る． ∎

定理 2.16 (既約性の判定) 有限群 G の任意の表現 ρ が既約であるための必要十分条件は $\langle \chi^\rho, \chi^\rho \rangle = 1$ が成り立つことである．

［証明］ 一般に (2.63) に対し $\langle \chi^\rho, \chi^\rho \rangle = m_1^2 + \cdots + m_K^2$ となる．これが 1 に等しいのは，ただ一つの m_μ のみ 1 で他は 0 のときである． ∎

定理 2.17 $\rho^{(1)}, \cdots, \rho^{(K)}$ を有限群 G の既約表現の代表系とする．どの $\rho^{(\mu)}$ も，G の正則表現の既約分解に必ず現われ，その重複度は $\rho^{(\mu)}$ の表現空間の次元数 $\deg \rho^{(\mu)}$ に等しい．すなわち

$$\rho^{\mathrm{reg}} = (\deg\ \rho^{(1)})\rho^{(1)} + \cdots + (\deg\ \rho^{(K)})\rho^{(K)} \tag{2.65}$$

［証明］ 例 2.13 で計算した正則表現の指標に (2.64) を適用する． ∎

(2.65) により $\rho^{\mathrm{reg}}(e)$ のトレースを求めれば

$$(\deg\ \rho^{(1)})^2 + \cdots + (\deg\ \rho^{(K)})^2 = |\mathsf{G}|. \tag{2.66}$$

定理 2.18 (ρ, V) を有限群 G の既約表現とし，f を G 上の類関数とすれば

$$\sum_{a \in \mathsf{G}} f(a)\rho(a) = \frac{|\mathsf{G}|}{\deg\ \rho} \langle \bar{\chi}^\rho, f \rangle I_{\mathsf{V}} \quad (I_{\mathsf{V}} \text{は V上の恒等変換})$$

［証明］ $A_f = \sum_{a \in \mathsf{G}} f(a)\rho(a)$ は V 上の線形変換で，任意の $g \in \mathsf{G}$ に対し

$$A_f \rho(g) = \rho(g) \sum_{a \in \mathsf{G}} f(a)\rho(g^{-1}ag) = \rho(g) \sum_{a' \in \mathsf{G}} f(ga'g^{-1})\rho(a') \tag{2.67}$$

となり ($g^{-1}ag = a'$ とおいた)，f が類関数であることから

$$A_f \rho(g) = \rho(g) A_f \qquad (\forall g \in \mathsf{G})$$

が成り立つ．ゆえに，定理 2.7 により $A_f = cI_{\mathsf{V}}$ となる．定数 c は両辺のトレースをとれば決定できて，定理の式を得る． ∎

G 上の類関数の全体は $C(\mathsf{G})$ の線形部分空間をなす．これを $C_0(\mathsf{G})$ としよう．

定理 2.19 $\rho^{(1)}, \cdots, \rho^{(K)}$ を有限群 G の既約表現の代表系とすれば，その指標の全体 $\hat{e} = \{\chi^{\rho^{(1)}}, \cdots, \chi^{\rho^{(K)}}\}$ は $C_0(\mathsf{G})$ の正規直交基底をなす．

［証明］ $\hat{e}$ が正規直交系をなすことは定理 2.14 で見た．これが生成する線形

部分空間を M とし，$C_0(\mathsf{G}) = \mathsf{M} \oplus \mathsf{M}^\perp$ とおいて $\mathsf{M}^\perp = 0$ を示そう．$\mathsf{M}^\perp$の任意の元 f に対し，ρが既約なら $\langle \bar{\chi}^\rho, f \rangle = 0$ なので，上に用いた A_fは 0．ρが既約でなくても，既約分解して考えれば同じ結果を得る．ところが，いまρとして特に正則表現をとると

$$A_f \delta_e = \sum_{a \in \mathsf{G}} f(a) \delta_a$$

であり，δ_aは $C(\mathsf{G})$ の基底であったから $f \equiv 0$． ∎

定理 2.20 有限群の既約表現類の総数は，G の共役類 (定義 1.7) の総数に等しい．

［証明］ G 上の類関数とは，各共役類の上で定数をとる関数であるから $C_0(\mathsf{G})$ の次元は共役類の総数に等しい．$C_0(\mathsf{G})$ の次元は，定理 2.19 により既約表現類の総数にも等しい． ∎

有限可換群では，各元が共役類をなすので，既約表現類の総数は群の位数に等しい．その例は巡回群の場合 (例 2.6) に見られる．

定理 2.21 (既約指標の第 2 直交関係) 有限群 G の既約表現の代表系の指標を$\chi^{(1)}, \cdots, \chi^{(K)}$とし，G の元 a を含む共役類の大きさ (元の個数) を s_aとすれば

$$\sum_{\mu=1}^{K} \overline{\chi^{(\mu)}(a)} \chi^{(\mu)}(b) = \begin{cases} |\mathsf{G}|/s_a & (a \text{ と } b \text{ が共役のとき}) \\ 0 & (a \text{ と } b \text{ が共役でないとき}) \end{cases} \tag{2.68}$$

［証明］ G の各元に対して

$$f_a(b) = \begin{cases} 1 & (a \text{ と } b \text{ が共役のとき}) \\ 0 & (a \text{ と } b \text{ が共役でないとき}) \end{cases}$$

とおけば，これは類関数であるから，定理 2.19 による展開

$$f_a(b) = \sum_{\mu=1}^{K} \langle \chi^{(\mu)}, f_a \rangle \chi^{(\mu)}(b) = \frac{s_a}{|\mathsf{G}|} \sum_{\mu=1}^{K} \overline{\chi^{(\mu)}(a)} \chi^{(\mu)}(b)$$

ができる．これが (2.68) にほかならない． ∎

(2.68) で $a = e$ とおけば，$\chi^{(\mu)}(e)$ は既約表現 $\rho^{(\mu)}$の次数 d_μに等しいから

$$\sum_{\mu=1}^{K} d_\mu \ \chi^{(\mu)}(b) = \begin{cases} |\mathsf{G}| & (b = e \text{ のとき}) \\ 0 & (b \neq e \text{ のとき}) \end{cases} \tag{2.69}$$

が得られる．

有限群Gの，すべての異なる共役類を$C_1, \cdots, C_K$とし，すべての異なる既約指標を$\chi^{(1)}, \cdots, \chi^{(K)}$とするとき，$\chi^{(\mu)}$が$C_i$でとる値$\chi^{\mu}(i)$を$\mu$行，$i$列においた行列を**指標表** (character table) という．ここで，指標は類関数なので共役類C_iでとる値を$\chi^{(\mu)}(i)$と書くことにした．共役類の中には単位元のみからなるものがあるから，それをC_1とすれば，第1列には各$\chi^{(\mu)}$に対応する表現$\rho^{(\mu)}$の次元数が並ぶ．

与えられた群Gの既約指標の表が得られれば，それを用いて表現の簡約をすることができる．それに役立つ定理をまとめておこう．

(C1) (Gの既約表現類の総数 K) = (Gの共役類の総数) (定理 2.20)

(C2) 既約表現の次元数をn_μとすれば$\sum_{\mu=1}^{K} n_\mu^2 = |G|$ (式 (2.66))

(C3) $\sum_{i=1}^{K} s_i \overline{\chi^{(\mu)}(i)}\chi^{(\nu)}(i) = |G|\delta_{\mu\nu}$ (式 (2.62))

(C4) $\sum_{\mu=1}^{K} \overline{\chi^{(\mu)}(i)}\chi^{(\mu)}(j) = \frac{|G|}{s_i}\delta_{ij}$ (定理 2.21)

ここに，$s_i = |C_i|$は共役類C_iの含む元の数を表わす．

例 2.15 二面体群 D_4 指標表をつくる．D_4の共役類は例 1.16 により五つであるから，(C1) により既約表現類の数も 5 である．ゆえに (C2) による$|D_4| = 8$の分解は 5 項からなり，$8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$に限る．よって，既約表現は 1 次元のもの四つと，2 次元のもの一つがある．これで，指標表の第 1 列が定まった．既約表現の中にはトリヴィアルな$R^{(1)}(a) = 1$ $(\forall a \in G)$が必ずあるので，その指標も第 1 行に書き入れた．

	$\{e\}$	$\{a^2\}$	$\{a, a^3\}$	$\{b, ba^2\}$	$\{ba, ba^3\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1				
$\chi^{(3)}$	1				
$\chi^{(4)}$	1				
$\chi^{(5)}$	2				

1 次元表現の指標を仮にχとすれば，(1.9) から

$$\chi(a^4) = \chi(a)^4 = 1, \quad \chi(b)^2 = 1, \quad \Big[\chi(b)\chi(a)\Big]^2 = 1$$

となり $\chi(b) = \pm 1$ に対して $\chi(a) = \pm 1$ に限られる．これらを直交性 (C3) が成り立つように定めて表に書き込む．

μ	$\{e\}$	$\{a^2\}$	$\{a, a^3\}$	$\{b, ba^2\}$	$\{ba, ba^3\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	1	1	-1	1	-1
$\chi^{(4)}$	1	1	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	2	α_1	α_2	α_3	α_4

残った $\alpha_1, \cdots, \alpha_4$ は直交性 (C4) の連立 1 次方程式から定まる．あるいは，(C3) を用いれば大きさ $s_i = 2$ の共役類 i に対し $\chi^{(5)}(i) = 0$ が知れる．よって表 2.2 を得る．念のため (2.69) の直交性を確かめるとよい．

いまや 2 次元表現は容易に得られる：

$$R^{(\mathrm{E})}(a) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/4) & -\sin(2\pi/4) \\ \sin(2\pi/4) & \cos(2\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R^{(\mathrm{E})}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.70}$$

なお，表 2.2 では Mulliken の命名法*12 により既約表現に A_1, A_2 などの名前をつけた．1 次元表現は，最小角の回転に対する指標が $+1$ なら A とよび，-1 なら B とよぶ．2 次元表現は E，3 次元なら T とよぶ．反転 I を含む群の場合，指標が $+1$ の表現には g を，-1 のものには u を添える．ドイツ語の gerade, ungerade の略である (後の例 2.17 を見よ)． □

表 2.2 二面体群 D_4 の指標表

μ		$\{e\}$	$\{a^2\}$	$\{a, a^3\}$	$\{b, ba^2\}$	$\{ba, ba^3\}$
$\chi^{(1)}$	A_1	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	A_2	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	B_1	1	1	-1	1	-1
$\chi^{(4)}$	B_2	1	1	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	E	2	-2	0	0	0

*12 R. Mulliken, Phys. Rev. **43**(1933), 279.

例 2.16 二面体群 D_6 正六角形の中心を原点とし，一つの頂点に向けて x 軸を，面に垂直に z 軸をとる．正六角形を z 軸のまわりに回転させる群 C_6 に x 軸まわりの π の回転 C_2' を加えた二面体群 D_6 (例 1.16) は位数 12 で，共役類は

$$\begin{aligned}&\{e\},\{a,a^5\},\{a^2,a^4\},\{a^3\},\{C_2',C_2'a^2,C_2'a^4\},\\&\{C_2'',C_2''a^2,C_2''a^4\} \qquad (a=C_6)\end{aligned} \tag{2.71}$$

の六つ．したがって，1 次元表現四つと 2 次元表現二つをもつ．$a=C_6$, $a^2=C_3$, $a^3=C_2$, C_2', $aC_2'=C_2''$ で上の各共役類をそれぞれ代表させると，1 次元表現では $C_3=(C_6)^2$, $C_2=(C_6)^3$ の指標は C_6 の指標できまってしまう．表現 A, B に対しては上記の命名法から $\chi(C_6)=+1,-1$ である．2 次元表現の指標は前例と同様に直交性からきめる．こうして表 2.3 が得られる．表の C_6 等は代表元で同値類を表わしたのである．それらに添えた数字は共役類の大きさを示す．

表 2.3 二面体群 D_6 の指標表

	e	$2C_6$	$2C_3$	C_2	$3C_2$	$3C_2''$
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	-1	1
E_1	2	1	-1	-2	0	0
E_2	2	-1	-1	2	0	0

2 次元表現の行列は：

$$\begin{aligned}
R^{(\mathrm{E1})}(a)&=\begin{pmatrix}\cos(2\pi/6) & -\sin(2\pi/6)\\ \sin(2\pi/6) & \cos(2\pi/6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix},\\
R^{(\mathrm{E2})}(a)&=\begin{pmatrix}\cos(4\pi/6) & -\sin(4\pi/6)\\ \sin(4\pi/6) & \cos(4\pi/6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix},\\
R^{(\mathrm{E})}(C_2')&=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

最後の行列は E_1, E_2 に共通である． □

例 2.17 群 $\mathrm{D}_{6\mathrm{h}}$ これは例 2.16 の群 D_6 に，さらに xy 平面に関する鏡映 σ_h

を加えた群で，共役類は (2.71) に示したD_6の六つに

$$\begin{aligned}&\{I\},\ \{\sigma_\mathrm{h}\},\ S_6=\{\sigma_\mathrm{h}a,\sigma_\mathrm{h}a^5\},\ S_3=\{\sigma_\mathrm{h}a^2,\sigma_\mathrm{h}a^4\}\quad (I=\sigma_\mathrm{h}a^3)\\ &\{\sigma_\mathrm{v},\sigma_\mathrm{v}a^2,\sigma_\mathrm{v}a^4\},\ \{\sigma_\mathrm{d},\sigma_\mathrm{d}a^2,\sigma_\mathrm{d}a^4\}\quad (\sigma_\mathrm{v}=\sigma_\mathrm{h}C_2',\ \sigma_\mathrm{d}=\sigma_\mathrm{h}C_2'')\end{aligned}\qquad(2.73)$$

を合わせ都合 12 個になる．位数は 24 である．σ_hを加えたことで共役類の数も位数も 2 倍になった．既約表現の数も 2 倍である．ここに，$a=C_6$は z 軸まわりの $2\pi/6$ の回転であり，$C_2''=aC_2'$は x 軸を時計回りに $\pi/6$ だけ傾けた軸のまわりの π の回転となる． □

群$\mathrm{D}_{6\mathrm{h}}$の指標表は，二面体群D_6に対する表 2.3 から容易に得られる．$\mathrm{D}_{6\mathrm{h}}$の既約表現は，D_6の既約表現を反転 $I=\sigma_\mathrm{h}C_2$につき gerade, ungerade に振り分ければ得られる (表 2.4)．ここでσ_hの欄は $I=\sigma_\mathrm{h}C_2$により I と C_2の欄から定めた．

σ_hを用いれば $S_6=\sigma_\mathrm{h}C_6$, $S_3=\sigma_\mathrm{h}C_3$, $\sigma_\mathrm{v}=\sigma_\mathrm{h}C_2'$, $\sigma_\mathrm{d}=\sigma_\mathrm{h}C_2''$ の欄もただちに定まり，表 2.5 が得られる．2 次元表現の行列は，(2.72) に加えて，$\mathrm{E}_{1\mathrm{g}},\cdots,\mathrm{E}_{2\mathrm{u}}$に共通に

$$R^{(\mathrm{E})}(I)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

表 2.4 群$\mathrm{D}_{6\mathrm{h}}$の指標表

	e	$2C_6$	$2C_3$	C_2	$3C_2'$	$3C_2''$	I	σ_h	$2S_6$	$2S_3$	$3\sigma_\mathrm{v}$	$3\sigma_\mathrm{d}$
$\mathrm{A}_{1\mathrm{g}}$	1	1	1	1	1	1	1	1				
$\mathrm{A}_{2\mathrm{g}}$	1	1	1	1	−1	−1	1	1				
$\mathrm{B}_{1\mathrm{g}}$	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1				
$\mathrm{B}_{2\mathrm{g}}$	1	−1	1	−1	−1	1	1	−1				
$\mathrm{E}_{1\mathrm{g}}$	2	1	−1	−2	0	0	2	−2				
$\mathrm{E}_{2\mathrm{g}}$	2	−1	−1	2	0	0	2	2				
$\mathrm{A}_{1\mathrm{u}}$	1	1	1	1	1	1	−1	−1				
$\mathrm{A}_{2\mathrm{u}}$	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1				
$\mathrm{B}_{1\mathrm{u}}$	1	−1	1	−1	1	−1	−1	1				
$\mathrm{B}_{2\mathrm{u}}$	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1				
$\mathrm{E}_{1\mathrm{u}}$	2	1	−1	−2	0	0	−2	2				
$\mathrm{E}_{2\mathrm{u}}$	2	−1	−1	2	0	0	−2	−2				

表 2.5　群 $\mathrm{D_{6h}}$の指標表

	e	$2C_6$	$2C_3$	C_2	$3C_2'$	$3C_2''$	I	σ_h	$2S_6$	$2S_3$	$3\sigma_\mathrm{v}$	$3\sigma_\mathrm{d}$
$\mathrm{A_{1g}}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathrm{A_{2g}}$	1	1	1	1	−1	−1	1	1	1	1	−1	−1
$\mathrm{B_{1g}}$	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	−1	1
$\mathrm{B_{2g}}$	1	−1	1	−1	−1	1	1	−1	1	−1	1	−1
$\mathrm{E_{1g}}$	2	1	−1	−2	0	0	2	−2	−1	1	0	0
$\mathrm{E_{2g}}$	2	−1	−1	2	0	0	2	2	−1	−1	0	0
$\mathrm{A_{1u}}$	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
$\mathrm{A_{2u}}$	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	1
$\mathrm{B_{1u}}$	1	−1	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1
$\mathrm{B_{2u}}$	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1
$\mathrm{E_{1u}}$	2	1	−1	−2	0	0	−2	2	1	−1	0	0
$\mathrm{E_{2u}}$	2	−1	−1	2	0	0	−2	−2	1	1	0	0

例 2.18　交代群　群 A_4 (例 1.9) の共役類は

$$\mathsf{C}_1 = \{e\}$$
$$\mathsf{C}_2 = \{(12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$$
$$\mathsf{C}_3 = \{(123),\ (142),\ (134),\ (243)\}$$
$$\mathsf{C}_4 = \{(132),\ (124),\ (143),\ (234)\}$$

の四つである．$|\mathrm{A}_4| = 4!/2 = 12$ の (C2) による 4 項分割は $12 = 3^2+1^2+1^2+1^2$ しかないから，既約表現は 3 次のもの一つと 1 次のもの三つである．

いま，$\mathsf{N} = \mathsf{C}_1 \cup \mathsf{C}_2$とおけば，これは A_4の正規部分群であって (例 1.20)

$$\mathrm{A}_4/\mathsf{N} = \{\mathsf{N},\ \mathsf{C}_3,\ \mathsf{C}_4\}$$

となる．$\mathsf{C}_3^2 = \mathsf{C}_4$, $\mathsf{C}_3^3 = \mathsf{N}$ であるから A_4/N は C_3を生成元とする 3 次の巡回群である．A_4/N は A_4に準同形だから (例 1.24)，前者の表現行列 S を後者の表現とすることができる．すなわち，A_4から A_4/N への標準写像 π(例 1.24) を用いて

$$R(a) = S(\pi(a))$$

とおく．$\pi(a)$ は a の属する剰余類で $\pi(a) = \mathsf{N}a$ と書ける．実際これが表現を与えることは $\mathsf{N}a = a\mathsf{N}$ に注意すれば確かめられる．剰余類は，いま $\mathsf{N} = \mathsf{C}_1 \cup \mathsf{C}_2$, C_3, C_4であるから，たとえば $a \in \mathsf{C}_2$なら $R(a) = S(\mathsf{N})$ となる．

A_4/N の既約表現は例 2.6 から得られる三つである．ω を 1 の 3 乗根として

$$S^{(1)}(N)=1,\quad S^{(1)}(C_3)=1,\quad S^{(1)}(C_3^2)=1$$
$$S^{(2)}(N)=1,\quad S^{(2)}(C_3)=\omega,\quad S^{(2)}(C_3^2)=\omega^2$$
$$S^{(3)}(N)=1,\quad S^{(3)}(C_3)=\omega^2,\quad S^{(3)}(C_3^2)=\omega$$

こうして，A_4の三つの 1 次元表現が得られた．それが，そのまま指標である．残る 3 次元表現の指標は (C4) の直交性から決定できて，表 2.6 が得られる．□

表 2.6　交代群 A_4の指標表

	C_1	$3C_2$	$4C_3$	$4C_4$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	ω	ω^2
$\chi^{(3)}$	1	1	ω^2	ω
$\chi^{(4)}$	3	-1	0	0

§2.5　誘導表現

有限群 G の部分群 H の表現 Δ から，親の群の表現をつくることができる．それには，G の H による左剰余類分割 (定理 1.2)

$$G=b_1H+b_2H+\cdots+b_rH \qquad (b_j\in G) \tag{2.74}$$

を利用する．$r=[G:H]$ は H の G における指数 (定理 1.4の上) である．

部分群 H の既約表現 (Δ, W) の基底を $\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_d$とし

$$W^G=\{\boldsymbol{u}_{j\beta}=\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{w}_\beta\,|\,j=1,\cdots,r;\ \beta=1,\cdots,d\} \tag{2.75}$$

とおく．ただし，$\boldsymbol{e}_j$は R^rの縦ベクトルで第 j 成分のみ 1，他は 0 とする．そして，$g\in G$ に応ずる変換 $\sigma^G(g)$ を

$$\sigma^G(g)\boldsymbol{u}_{j\beta}=\boldsymbol{e}_k\otimes\Delta(b_k^{-1}gb_j)\boldsymbol{w}_\beta$$

と定める．ここに，(2.74) の右辺のうち gb_jの入る剰余類は一つあって一つに限るので，それを b_kH として k を定めた．そのため $b_k^{-1}gb_j\in H$ となり，与えられた既約表現 (Δ, H) が利用できるのである．表現行列で書けば

$$\boldsymbol{e}_k\otimes\Delta(b_k^{-1}gb_j)\boldsymbol{w}_\beta=\boldsymbol{e}_k\otimes\sum_{\alpha=1}^{d}\Delta(b_k^{-1}gb_j)_{\alpha,\beta}\boldsymbol{w}_\alpha\in W^G$$

となる．すなわち

$$\sigma^{\mathrm{G}}(g)\boldsymbol{u}_{j\beta} = \sum_{\alpha=1}^{d} R(g)_{ij;\alpha\beta}\boldsymbol{u}_{i\alpha}. \tag{2.76}$$

ここに

$$R(g)_{ij;\alpha\beta} = \delta_{ij}(g)\Delta(b_i^{-1}gb_j)_{\alpha\beta} \tag{2.77}$$

である．ただし

$$\delta_{ij}(g) = \begin{cases} 1 & (gb_j \in b_i\mathrm{H}\ \text{のとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

これが表現になっていることはただちにわかる：

$$\begin{aligned} \sigma^{\mathrm{G}}(g')\sigma^{\mathrm{G}}(g)\boldsymbol{u}_{j\beta} &= \boldsymbol{e}_l \otimes \Delta(b_l^{-1}g'b_k)\Delta(b_k^{-1}gb_j)\boldsymbol{u}_{j\beta} \\ &= \boldsymbol{e}_l \otimes \Delta(b_l^{-1}g'gb_j)\boldsymbol{u}_{j\beta} \qquad (j=1,\cdots,r\,;\ \beta=1,\cdots,d) \end{aligned}$$

これを，部分群 H の表現 (Δ, W) から誘導された親の群 G の表現，縮めて**誘導表現** (induced representation) といい，$(\Delta^{\mathrm{G}}, \mathrm{W}^{\mathrm{G}})$ と記す．これは一般には既約でない．

なお，$\boldsymbol{w}_\beta$ $(\beta = 1,\cdots,d)$ への b_j $(j = 1,\cdots,r)$ の作用 $\sigma(b_j)$ が定義できて $\sigma(b_j)\boldsymbol{w}_\beta$ $(j = 1,\cdots,r,\ \beta = 1,\cdots,d)$ が 1 次独立になる場合には，(2.75) の代わりに $\boldsymbol{u}_{j\beta} = \sigma(b_j)\boldsymbol{w}_\beta$ としてもよい*13．

§2.6 対称群の表現

対称群 S_n(例 1.4) の表現を構成するには群多元環による方法*14 と量子力学におけるスピンを用いる方法*15 がある．ここでは，後者をとりあげよう．

電子や陽子のスピンは，演算子 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma}\hbar/2$ で表わされる．$\boldsymbol{\sigma}$ は Pauli の行列で

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.78}$$

*13　巻末に挙げた参考書 [47], § 4.1 を参照のこと．

*14　[6] を参照．

*15　創始者による解説：P. A. M. Dirac,『量子力学』，朝永振一郎ほか訳，岩波書店 (1968), pp.296–302.

の 3 成分をもち，次の “反交換関係” をみたす．ただし，$\delta_{k,l}$は単位行列 I の$\delta_{k,l}$倍を意味する：

$$\sigma_k\sigma_l + \sigma_l\sigma_k = \delta_{k,l} \qquad (k, l = x, y, z). \tag{2.79}$$

スピンは粒子の自転角運動量ともいわれ，その状態は (2.54) の $\boldsymbol{e}_\uparrow, \boldsymbol{e}_\downarrow$を基底とする複素 2 次元空間の単位ベクトルで表わされる．ここでは，$\boldsymbol{e}_\uparrow$を $\boldsymbol{\alpha}$ と書き，$\boldsymbol{e}_\downarrow$を $\boldsymbol{\beta}$と書く．これらは s_zの固有ベクトルであって

$$s_z\boldsymbol{\alpha} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\alpha}, \quad s_z\boldsymbol{\beta} = -\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\beta} \tag{2.80}$$

をみたし，スピンの z 成分が，それぞれ$\hbar/2, -\hbar/2$ である状態を表わすのである．また，スピン・ベクトルの (大きさ)^{2}を

$$\boldsymbol{s}^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 \tag{2.81}$$

で定義すると，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ も固有値 $S(S+1)\hbar^2$ $(S = 1/2)$ の固有ベクトルになっている．このことをスピンの大きさは 1/2 であるという．スピンの一般の状態

$$\boldsymbol{\chi} = \xi\boldsymbol{\alpha} + \eta\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \qquad (|\xi|^2 + |\eta|^2 = 1) \tag{2.82}$$

の間に内積を (2.55) によって定義する．

二つのスピンの状態空間は，それぞれの状態空間のテンソル積 (定義 2.7) である．そのベクトルは一般に (2.60) のようにも表わすことができる．

行列のテンソル積を (2.50) で定義すると

$$\left(\sigma_k^{(1)}\sigma_l^{(2)}\right)\left[\boldsymbol{\chi}_1 \otimes \boldsymbol{\chi}_2\right] = \left[\sigma_k\boldsymbol{\chi}_1\right] \otimes \left[\sigma_l\boldsymbol{\chi}_2\right] \qquad (k, l = x, y, z) \tag{2.83}$$

の形の式が一般になりたつ．ここに，$\boldsymbol{\sigma}_k^{(1)} = \boldsymbol{\sigma}_k \otimes I$, $\boldsymbol{\sigma}_l^{(2)} = I \otimes \boldsymbol{\sigma}_l$であって，$\sigma_k^{(1)}\sigma_l^{(2)} = \sigma_k \otimes \sigma_l$．そこで

$$\rho_{12} = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \tag{2.84}$$

を考えよう．ここに $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ は (2.81) と同様のスカラー積 (対応する成分のテンソル積の和) である．具体的な計算から

$$\rho_{12}\Big(\boldsymbol{\chi}_1 \otimes \boldsymbol{\chi}_2\Big) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1\xi_2 \\ \xi_1\eta_2 \\ \eta_1\xi_2 \\ \eta_1\eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1\xi_2 \\ \eta_1\xi_2 \\ \xi_1\eta_2 \\ \eta_1\eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \\ \eta_2 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

が得られ，

$$\rho_{12}\Big(\boldsymbol{\chi}_1 \otimes \boldsymbol{\chi}_2\Big) = \boldsymbol{\chi}_2 \otimes \boldsymbol{\chi}_1 \tag{2.85}$$

を示す．このように ρ_{12}はスピン 1, 2 の状態ベクトルを入れ換えるので，$\rho_I = I$ と組んで対称群 S_2の表現になる．表現空間は二つのスピンの状態空間で，基底は $\{\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{\beta}\}$ である．この表現は既約でない．実際，基底を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{1,1} &= \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{u}_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\alpha}\Big], \\ \boldsymbol{u}_{1,-1} &= \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{u}_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\alpha}\Big] \end{aligned} \tag{2.86}$$

に変えると，(2.85) から

$$\rho_{12}\boldsymbol{u}_{1,M} = \boldsymbol{u}_{1,M} \qquad (M = 1, 0, -1) \tag{2.87}$$

となり，それぞれ $\rho_I = I$ と組んで三つの恒等表現を与える．また

$$\rho_{12}\boldsymbol{u}_{0,0} = -\boldsymbol{u}_{0,0} \tag{2.88}$$

となって，これは一つの反恒等表現を与える．いずれも 1 次元表現で，明らかに既約．こうして，(2.85) による S_2の表現は四つの 1 次元表現に既約分解された：

$$\rho_{12} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ O & & & -1 \end{pmatrix} \qquad \rho_I \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ O & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.89}$$

(2.86), (2.88) の $\boldsymbol{u}_{S,M}$は，二つのスピンの和

$$\hat{\boldsymbol{S}}_2 = \boldsymbol{s} \otimes I + I \otimes \boldsymbol{s}$$

の (大きさ)^{2}と z 成分との，それぞれ固有値 $S(S+1)\hbar^2$, $M\hbar$ の固有ベクトルである．恒等表現の 3 個は $S = 1$ の $\boldsymbol{u}_{1,M}$ $(M = 1, 0, -1)$ から一つずつ生じた．スピンの置換が合成スピンの大きさ S も z 成分 M も変えないことは $\hat{\boldsymbol{S}}_2$が置換

で不変なことから明らかである．そして，M の違いは系の空間的な配向の違いにすぎないから，スピンの置換に関して同様に振舞うのも当然である．スピンの数がもっと大きい系でも同じことで，対称群 S_n の表現は S と M を固定して調べればよい．しかも，それが既約表現を与えている[*16]．

これに示唆されて，三つのスピンを合成した

$$\hat{\boldsymbol{S}}_3 = \boldsymbol{s} \otimes I \otimes I + I \otimes \boldsymbol{s} \otimes I + I \otimes I \otimes \boldsymbol{s} \tag{2.90}$$

の (大きさ)^2 および z 成分の，それぞれ固有値 $S(S+1)$, M の固有ベクトルを，三つのスピンの状態空間の基底にとり，これらに対するスピンの置換の効果を調べよう．まず $S=3/2$ の固有ベクトルは，2 スピン系の $\boldsymbol{u}_{1,M'}$ を親として，これに第 3 のスピンを合成することで生じ[*17]，$M=3/2$ の

$$\boldsymbol{u}_{1;3/2,3/2} = \boldsymbol{u}_{1,1} \otimes \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\alpha} \tag{2.91}$$

や，$M=1/2$ の

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{1;3/2,1/2} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\boldsymbol{u}_{1,0} \otimes \boldsymbol{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{3}}\boldsymbol{u}_{1,1} \otimes \boldsymbol{\beta} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}}\Big[(\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\alpha}) \otimes \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}\Big] \end{aligned} \tag{2.92}$$

などがある．どれもスピンの置換で変わらず，S_3 の恒等表現を与える．確かに，M にはよらない．これを表現 $\rho^{(1)}$ とよぼう：

$$\rho^{(1)}(a) = 1 \qquad (\forall a \in \mathrm{S}_3). \tag{2.93}$$

$S=1/2$ の固有ベクトルは，M が最大の 1/2 を例にしていえば，2 スピン系の $\boldsymbol{u}_{0,0}$ を親として生ずる

$$\boldsymbol{u}_{0;1/2,1/2} = \boldsymbol{u}_{0,0} \otimes \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\alpha}\Big] \otimes \boldsymbol{\alpha} \tag{2.94}$$

と，2 スピン系の $\boldsymbol{u}_{1,M}$ を親として生ずる

$$\boldsymbol{u}_{1;1/2,1/2} = -\sqrt{\frac{1}{3}}\boldsymbol{u}_{1,0} \otimes \boldsymbol{\alpha} + \sqrt{\frac{2}{3}}\boldsymbol{u}_{1,1} \otimes \boldsymbol{\beta}$$

---

*16　このことは以下の例でも見られ，実は一般に成り立つ．その証明は参考書 [49], §44 にある．

*17　線形結合の係数は，いわゆる Clebsch–Gordan 係数で，量子力学の教科書に表が載っている．

$$= -\sqrt{\frac{1}{6}}\Big[\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{\alpha}\Big]\otimes\alpha+\sqrt{\frac{2}{3}}\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\beta} \quad (2.95)$$

がある．これらによる表現を $\rho^{(2)}$ とよぶことにしよう．まず

$$\rho_{12}^{(2)}\boldsymbol{u}_{0;1/2,1/2} = -\boldsymbol{u}_{0;1/2,1/2}, \quad \rho_{12}^{(2)}\boldsymbol{u}_{1;1/2,1/2} = \boldsymbol{u}_{1;1/2,1/2}.$$

これらは親の性質 (2.87), (2.88) の遺伝である．新しい性質は 2 と 3 の交換

$$\rho_{23}^{(2)}\boldsymbol{u}_{0;1/2,1/2} = \sqrt{\frac{1}{2}}\Big[\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\alpha}\Big]$$

に現われ，$\rho_{23}^{(2)}\boldsymbol{u}_{1;1/2,1/2}$ とともに

$$\rho_{23}^{(2)}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_{0;1/2,1/2}\\ \boldsymbol{u}_{1;1/2,1/2}\end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}_{0;1/2,1/2}, \boldsymbol{u}_{1;1/2,1/2})\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

にまとめることができる．表現行列だけ書けば，$U^{(2)}(e) = I$ はいうまでもなく

$$U^{(2)}(12) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad U^{(2)}(23) = \begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix},$$

$$U^{(2)}(31) = \begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}, \quad U^{(2)}(123) = \begin{pmatrix}-1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix},$$

$$U^{(2)}(132) = \begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}. \quad (2.96)$$

明らかに，表現 $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}$ は，ともにユニタリである．そのために表現行列を R でなく U で書くことにした．指標は表 2.7 のとおり：

表 2.7 S_3 の指標表

	$\{e\}$	$\{(12), (23), (31)\}$	$\{(123), (132)\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	2	0	-1
$\chi^{(3)}$	1	-1	1

第 3 の表現は上では得られなかったが，その存在は §4.2 の (C1) から知られる．(C3) を用いて指標を求めると，$\rho^{(3)}$ はすべての互換に -1 を対応させる完全反対称な表現であることがわかる．スピン 1/2 の 3 体系に完全反対称な状態

はないから，$\rho^{(3)}$が上の構成で得られなかったのは仕方がない．

$\mathbf{S}_n$ ($n>3$) への拡張

n 個のスピンからなる系の状態空間 H_nを用いた S_nの表現を，$n=2$ から始めて順次に構成してゆくことを考えよう．スピン数 n の系の，合成スピンの大きさ S，z 成分 S の固有状態は，スピン数 $n-1$ の系の $S'=S-1/2$ の状態から

$$\boldsymbol{u}^{(n)}_{\lambda,S-1/2;S,S}=\boldsymbol{u}^{(n-1)}_{\lambda,S-1/2,S-1/2}\otimes\boldsymbol{\alpha} \tag{2.97}$$

として得られ，また $S'=S+1/2$ の状態から

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^{(n)}_{\lambda',S+1/2;S,S}=&-\sqrt{\frac{1}{2S+2}}\boldsymbol{u}^{(n-1)}_{\lambda',S+1/2;S,S-1/2}\otimes\boldsymbol{\alpha}\\&+\sqrt{\frac{2S+1}{2S+2}}\boldsymbol{u}^{(n-1)}_{\lambda',S+1/2;S,S+1/2}\otimes\boldsymbol{\beta}\end{aligned} \tag{2.98}$$

としても得られるので，H_n にスピン S が現われる回数 $d(n,S)$ は $n=1$ の $d(1,1/2)=1$ から，n とともに

$$d(n,S)=d\left(n-1,S-\frac{1}{2}\right)+d\left(n-1,S+\frac{1}{2}\right)$$

により図 2.2 の分岐図 (branching diagram) が示すように増してゆく．こうして，親の状態は一般には $S',n-1$ だけでは定まらないので (2.97), (2.98) の $\boldsymbol{u}$ に λ を書き添え，分岐図の示す個数だけある親を区別することにした．いま，そうした λ 全体にわたる (2.97), (2.98) の全体が張る $d(n,S)$ 次元の空間 $\mathsf{H}^{(S)}_n$ をとって S_nの表現をつくろう．

表現空間 $\mathsf{H}^{(S)}_n$ の基底に (2.97), (2.98) をとってスピン i,j の互換

$$\rho_{ij}=\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{\sigma}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(j)})\qquad(i,j=1,2,\cdots,n) \tag{2.99}$$

を行列で表わすことを考えよう．ここに，$\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$は $\boldsymbol{\sigma}$ を i 番目において $n-1$ 個の I とテンソル積したもので，たとえば $n=3$ の $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$は $I\otimes\boldsymbol{\sigma}\otimes I$ である．ρ_{ij} $(i,j=1,\cdots,n-1)$ の作用は親の $\boldsymbol{u}_{\lambda,n-1,S',M'}$で定まるので，すでに知れているとする．問題は ρ_{in}であるが，その中の一つが定まれば十分である．いま，

$$K_n=\sum_{i=1}^{n-1}\rho_{in}=\frac{1}{2}\left[n-1+\sum_{i=1}^{n-1}\boldsymbol{\sigma}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\right] \tag{2.100}$$

とおく．$\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\boldsymbol{\sigma}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$は

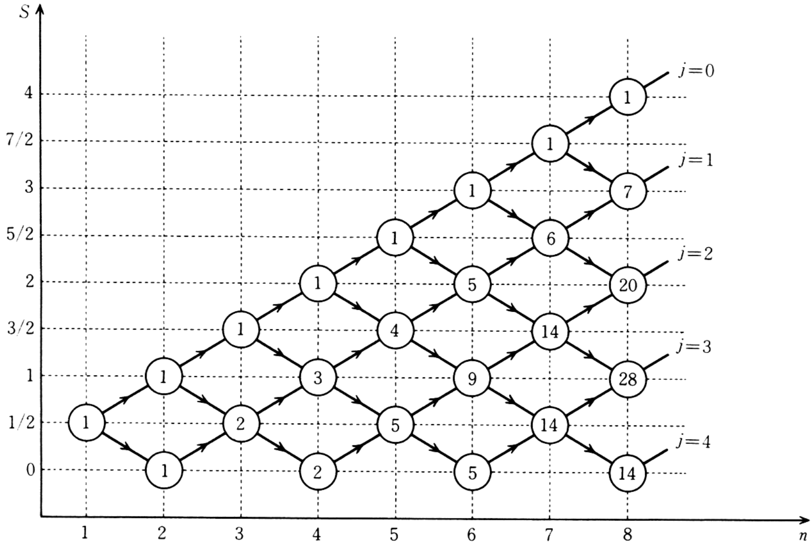


図 2.2 分岐図．スピン数 n を 1 ずつ増して得られる (M が例えば $M = S$ にきまった) 状態の系列．円内の数字は状態数 $d(n, S)$ を示す．$j = n/2 - S$ は (2.101) の計算に使われる．$S' = S + 1/2$ のとき $K_n = j - 2$ で，$S' = S - 1/2$ のとき $K_n = n - j - 1$．

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{s}^{(i)}\right)^2 - \boldsymbol{s}_n^2 = \left[S(S+1) - \frac{3}{4}\right]\hbar^2, \quad \left(\sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{s}^{(i)}\right)^2 = S'(S'+1)$$

の差の $2/\hbar^2$倍だから，K_nは $\boldsymbol{u}^{(n)}_{\lambda,S';S,S}$を

$$\kappa_p^{(n)} = \frac{n-1}{2} + \left[S(S+1) - S'(S'+1) - \frac{3}{4}\right] \tag{2.101}$$

倍するのみである．したがって，いまの基底では K_nは対角行列で表わされ，その対角要素 $\kappa_p^{(n)}$ は (2.98) の張る部分空間 ($p = 1, \cdots, d_+$) では $S' = S + 1/2$ とおき，(2.97) の張る部分空間 ($p = d_+ + 1, \cdots, d_+ + d_- = d(n, S)$) では $S' = S - 1/2$ とおけば得られる．ここに $d_\pm = d(n-1, S \pm 1/2)$．

(2.100) に右から $\rho_{n-1,n}$をかけて

$$\sum_{i=1}^{n-2} \rho_{i,n}\rho_{n-1,n} + I = K_n \rho_{n-1,n}$$

とし，これに $\rho_{n-1,n}\rho_{n-1,n} = I$ を左からかけて $\rho_{n-1,n}\rho_{i,n}\rho_{n-1,n} = \rho_{i,n-1}$ より

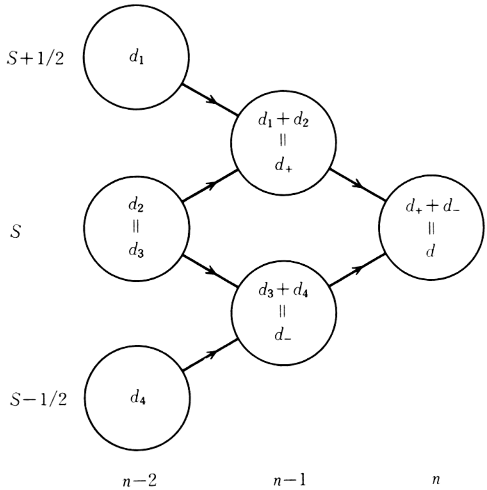


図 2.3

$$\rho_{n-1,n}K_{n-1} + I = K_n\rho_{n-1,n} \tag{2.102}$$

を得る．そこで，$\rho_{n-1,n}$の行列要素を (η_{pq}) とすれば (2.102) から

$$\kappa_p^{(n)}\eta_{pq} - \eta_{pq}\kappa_q^{(n-1)} = \delta_{pq}$$

が得られ

$$\eta_{pq} = \begin{cases} 1/(\kappa_p^{(n)} - \kappa_p^{(n-1)}) & (q = p) \\ 0 & (q \neq p,\ \kappa_p^{(n)} \neq \kappa_q^{(n-1)}) \end{cases} \tag{2.103}$$

ここで$\kappa_q^{(n-1)}$を (2.101) によって定めるには，(2.97), (2.98) から 1 世代さかのぼってスピン数 $n-2$ の状態を知らねばならない．したがって，表現空間は分岐図 (図 2.3) により d_1, d_2, d_3, d_4次元に分割される．ただし，$d_2 = d_3$．表現行列でいえば，互換 $(n-1, n)$ の行列が

$$U^{(n,S)}(n-1,n) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \tag{2.104}$$

の形になる．A_{pp}はd_p次元の正方行列である ($p=1,\cdots,4$; 図2.3を参照)．対角線上のブロックを (2.103) によって定める$\kappa_p^{(\cdot)}$は，表2.8で計算される．

表 2.8 $\kappa_p^{(\cdot)}$の計算表

	$\kappa_p^{(n)}$			$\kappa_p^{(n-1)}$			次元
	S	S'	値	S	S'	値	
A_{11}	S	$S+1/2$	$n/2-S-2$	$S+1/2$	$S+1$	$n/2-S-3$	d_1
A_{22}				$S+1/2$	S	$n/2+S-1$	d_2
A_{33}	S	$S-1/2$	$n/2+S-1$	$S-1/2$	S	$n/2-S-2$	d_3
A_{44}				$S-1/2$	$S-1$	$n/2+S-2$	d_4

たとえば，$\kappa_p^{(n-1)}$は，(2.101) で，まずnを$n-1$とし，A_{11}の部分ではSを$S'=S+1/2$にS'を$S''=S'+1/2=S+1$にする (表2.8の第1行)．

(2.104) のブロック A_{11}, A_{44}では$\kappa_p^{(n)} \neq \kappa_p^{(n-1)}$だから

$$\eta_{pq} = \begin{cases} 1 & (p=q) \\ 0 & (p \neq q) \end{cases} \tag{2.105}$$

ブロック A_{22}, A_{33}でも$\kappa_p^{(n)} \neq \kappa_p^{(n-1)}$は同様で

$$\eta_{pq} = \begin{cases} \mp\dfrac{1}{2S+1} & (p=q;\ A_{22}, A_{33}\text{の中で}) \\ 0 & (p \neq q) \end{cases} \tag{2.106}$$

A_{11}, A_{44}の対角要素が (2.103) により1となったので，$U^{n,S}$のユニタリ性から

$$A_{1j} = A_{j1} = 0 \quad (j=2,3,4), \qquad A_{4k} = A_{k4} = 0 \quad (k=1,2,3) \tag{2.107}$$

が得られる．しかし，ブロックA_{23}とA_{32}は$S=0$の場合を除き0とはいえない．なぜなら，表2.8から見て$\kappa_p^{(n)} = \kappa_q^{(n-1)}$となり得るし，(2.106) の与える$A_{22}, A_{33}$の対角要素は，$S$が0でなければ1より小さいからである．こうして，行列 (2.104) は次の形まで決定された：

$$U^{(n,S)}(n-1,n) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -\mu & A_{23} & \\ & A_{32} & \mu & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \frac{1}{2S+1} \tag{2.108}$$

ブロック A_{23}, A_{32} を決定するには，$\rho_{n-1,n}$ が部分群 S_{n-2} のどの元とも可換なことを利用する．分岐図 (図 2.3) から見て，いまの構成法では S_{n-2} の表現行列は $d_1, \cdots, d_4$ 次元既約表現の直和

$$U^{(n-2,S)}(a) = \begin{pmatrix} U^{(n-2,S+1)}(a) & & & O \\ & U^{(n-2,S)}(a) & & \\ & & U^{(n-2,S)}(a) & \\ O & & & U^{(n-1,S-1)}(a) \end{pmatrix}$$

$$(a \in \mathrm{S}_{n-2}) \qquad (2.109)$$

になる．よって，両者が可換なことから

$$U^{(n-2,S)}(a)A_{23} = A_{23}U^{(n-2,S)}(a) \qquad (\forall a \in \mathrm{S}_{n-2})$$

がでる．したがって，定理 2.7 により A_{23} は単位行列の定数倍である．その定数は (2.108) がユニタリなことから $\pm\sqrt{1-\mu^2}$ と定まる．この符号は任意である．実際，この符号を変えるユニタリ変換で S_{n-1} の表現行列を不変にするものが存在する．対角線上，最初の $d_1 + d_2$ 個所には 1，続く $d_3 + d_4$ 個所には -1 が並んだ行列がそれである．A_{32} についても同様．

こうして，対称群 S_n に対して S ごとに得られる $d(n,S)$ 次元表現は既約である[*18]．

例 2.19 S_4 の $S=1$ の表現行列 $U^{(4,1)}$. ここでは，上付き添字 (4,1) を省く．

$$U(34) = \begin{pmatrix} -1/3 & \sqrt{8}/3 & 0 \\ \sqrt{8}/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U(12) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$U(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

分岐図 (図 2.3) に見るとおり，いま $d_1 = 0$ なので，U は左肩の 1 が欠けて 3 行 3 列となった．部分群 S_{n-1} $(n=4)$ の表現は，分岐図によれば 1 次元表現と 2 次元表現の直和になる．それは $U(12), U(23)$ に明瞭である． □

*18 参照：[31], §44.

§2.7 表現の簡約 —— 物理学への応用

有限群のどの表現 R' も完全可約であるから (定理 2.5)，表現行列を適当な変換 T により既約表現 $R^{(\nu)}$ の —— (2.29) のような —— 直和の形

$$T^{-1}R'(a)T = \sum_{\nu} m_\nu R^{(\nu)}(a) \qquad (a \in \mathsf{G}) \tag{2.110}$$

にできる．ただし，m_ν は (2.29) に $R^{(\nu)}$ が繰り返し現われる回数 (重複度) を表わす．この変換を表現 R' の**簡約** (reduction)，あるいは**既約分解** (irreducible decomposition) という．行列のトレースは変換によらず不変であるから，表現 R' の指標 χ' も

$$\chi'(a) = \sum_{\nu} m_\nu \chi^{(\nu)}(a) \tag{2.111}$$

のように分解される．重複度 m_μ は (2.64) で求められる．指標は類関数だから，群の元 a に関する和を共役類 C_i ごとにまとめ

$$m_\mu = \frac{1}{|\mathsf{G}|}\sum_{i} s_i \chi^{(\mu)}(i)\chi'(i) \tag{2.112}$$

としてよい．ここに s_i は共役類 C_i の大きさである．

群の表現の簡約は物理に広く応用される．その例を示そう．

(a) 分子の振動

分子には，その形と，その変形に逆らう力の分布によって固有振動のモードが定まっている．それを見いだすのに群の表現の簡約法が役立つ．

分子 M が固有振動をしているとしよう．そのとき，M の各原子の振幅ベクトルを —— 長さの和を 1 に規格化して —— 並べた $(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_N)$ を固有振動の**モード** (mode) という．振動の角振動数を ω とすれば $\boldsymbol{A}_i \cos\omega t$ $(i = 1, \cdots, N)$ は線形の連立 2 階微分方程式に従う．

いま，群 G で原子を動かしても当の分子の形が変わらないとしよう．固有振動している分子は，その群 G の元を作用させても相変わらず同じ振動数の固有振動をしているように見える．したがって，もし振動数によって固有振動のモードが一意に定まるなら，モードは群 G の変換によってたかだか符号を変え

るだけである．もし，いくつかのモードが同じ固有振動数に属するなら，群 G はそれらの間に線形変換を引きおこすであろう．振動の方程式は線形だからである．こうして，分子 M の一つの固有振動数に属する固有振動のモードは集まって G の既約表現をなすであろう．

いや，同じ振動数のモードが何組かに分かれ，その各組が既約表現を与えるということもないとはいえない．それでも，既約表現が固有振動数をきめることは動かせない事実である．

水の分子 H_2O を例にとって具体的に考えよう．水の分子は，酸素原子 O から角 $\theta = 104.45^\circ$ をなして出た 2 本の腕の先に水素原子 H がついて二等辺三角形をなしており，腕が伸縮し，あるいは角 θ が増減すると，それぞれの変化高に比例した大きさの復原力がはたらく．この分子は，O を通り線分 HH を垂直二等分する軸のまわりの角 π の回転 C_2，垂直二等分面に関する鏡映 σ_v'，分子を含む面に関する鏡映 σ_v に対して不変である．これらは群 $\mathrm{C_{2v}}$ をなす (例 1.7)．

いま，酸素原子と二つの水素原子の微小変位を例 1.27 の図 1.4 のように表わす．水分子を C_2 で動かすと，各原子の変位は (2.16) のように変換される．この変換 $R^{(9)}(C_2)$ の指標 $\chi^{(9)}(C_2)$ は -1 である．指標を求めるのなら，大きな行列を書く必要はなかった．対角要素だけが問題なので C_2 によって位置の変わらない原子だけを見ればよい．いま，それは酸素原子で，C_2 により変位の x, y 成分は -1 倍され z 成分は変わらないことから $\chi^{(9)}(C_2) = -1$ がただちに知れる．他の変換についても同様にして表 2.9 の最後の行が得られる．

表 2.9 $\mathrm{C_{2v}}$ の既約指標と '水分子' 表現 $R^{(9)}$ の指標

$\mathrm{C_{2v}}$	e	C_2	σ_v'	σ_v
$\mathrm{A_1}$	1	1	1	1
$\mathrm{A_2}$	1	1	−1	−1
$\mathrm{B_1}$	1	−1	−1	1
$\mathrm{B_2}$	1	−1	1	−1
$R^{(9)}$	9	−1	1	3

この表の $\mathrm{A_1}$ から $\mathrm{B_2}$ までの行は群 $\mathrm{C_{2v}}$ の既約指標である．$\mathrm{C_{2v}}$ は可換群だから既約表現は，定理 2.8 により，すべて 1 次元で，各原子の変位 (図 1.2, 1.4) を次のようにとった基底ベクトルにそれぞれ対応する．ここで b_z, c_x などは任意

であって，このため次の A_1' と B_2の変位は 2 次元の，B_1の変位は 3 次元の空間を張る．そして全体で R^9の基底となる．

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrr}
A_1: & (1, & 0, & 0, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0) \\
A_1': & (0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & c_z) \\
A_2: & (0, & -1, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0) \\
B_1: & (1, & 0, & b_z, & 1, & 0, & -b_z, & c_x, & 0, & 0) \\
B_2: & (0, & 1, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & c_y, & 0)
\end{array}
$$

表 2.9 から，(2.112) により $R^{(9)}$の既約分解が得られる：

$$R^{(9)} = 3A_1 + A_2 + 3B_1 + 2B_2. \tag{2.113}$$

右辺の，たとえば $3A_1$は，$R^{(9)}$の中に既約表現 A_1が 3 回含まれていることを意味している．この数 3 は，(2.112) に従い表 2.9 の $R^{(9)}$の行と A_1の行との対応する指標を掛けて加え，群 C_{2v}の位数 4 で割って得たものである．すなわち

$$\frac{(9\times 1)+(-1\times 1)+(1\times 1)+(3\times 1)}{4} = 3.$$

(2.113) の右辺の他の項も同様にして得られる．

しかし，既約成分がすべて固有振動のモードを与えるわけではない．明らかに A_2は分子の z 軸まわりの微小回転であり，A_1'で $c_z = 1$ としたものは z 方向への並進であるから除かれる．B_1は b_z, c_xを適当にとると x 方向の並進，z 軸まわりの回転になり 2 自由度が除かれる．B_2は $c_y = 1$ で y 方向への並進，適当な $c_y < 0$ で x 軸まわりの回転になり 2 自由度とも除かれる．こうして，A_1の対称性をもつ 2 自由度と B_1の 1 自由度

$$2A_1 + B_1 \tag{2.114}$$

が残る．この範囲でハミルトニアンを対角化し固有振動のモードを得る (図 2.4).

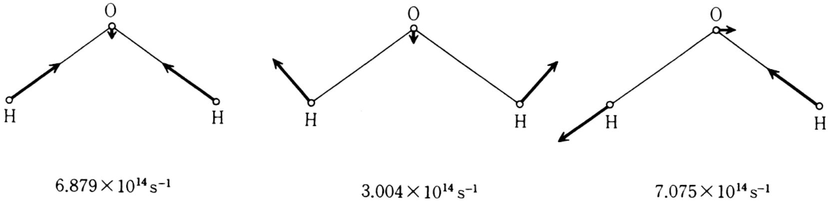


図 2.4 水分子の固有振動モードと角振動数

(b) 相互作用によるエネルギー準位の分裂

1 平面上で剛体壁により正方形 S$=\{(x,y)|-L/2\leqq x,y\leqq L/2\}$ の内部に質量 m の粒子 2 個が閉じ込められているとしよう．

手はじめに，1 体問題を考える．1 粒子のエネルギー準位 E と固有関数 u は，Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)=Eu(x,y)\qquad \Big((x,y)\in \mathrm{S}\Big)$$

を境界条件

$$u(x,y)=0\qquad (\mathrm{S}\text{ の境界上で})$$

のもとで解けば得られ

$$u_{n_x,n_y}(x,y)=\frac{2}{L}\sin\frac{n_x\pi}{L}\left(\frac{L}{2}-x\right)\sin\frac{n_y\pi}{L}\left(\frac{L}{2}-y\right),$$

$$E_{n_x,n_y}=\left(n_x^2+n_y^2\right)\varepsilon\qquad \left(\varepsilon=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2};\ n_x,n_y=1,2,\cdots\right).$$

最も低いエネルギー準位は $(n_x,n_y)=(1,1)$ の $E_{11}=2\varepsilon$ で，固有関数は

$$u_{11}=\frac{2}{L}\cos\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi y}{L}$$

である．次の準位 (第 1 励起準位) は $E_{21}=E_{12}=5\varepsilon$ が重なり

$$u_{21}(x,y)=\frac{2}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}\cos\frac{\pi y}{L},\quad u_{12}(x,y)=\frac{2}{L}\cos\frac{\pi x}{L}\sin\frac{2\pi y}{L}$$

の二つの固有関数をもつ (2 重の縮退)．これらは内積

$$\langle\varphi,\psi\rangle:=\int_{\mathrm{S}}\bar{\varphi}(x,y)\psi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

の意味で直交している：$\langle u_{n'_x,n'_y},u_{n_x,n_y}\rangle=\delta_{n_x,n'_x}\delta_{n_y,n'_y}$．これらの任意の線形結合も同じエネルギーの固有関数であるから，準位 5ε には固有空間として正規直交基底 $\{u_{21},u_{12}\}$ が張る 2 次元の複素線形空間 H_2 が属しているという方がよい．最低の準位の固有空間 H_1 は 1 次元である．

さて，正方形 S を不変にする群 D_4(二面体群，例 1.16) は座標 (x,y) を

$$\rho(a)\cdot(x,y)=(y,-x),\quad \rho(b)\cdot(x,y)=(-x,y)\tag{2.115}$$

のように変換し，波動関数を $(\rho\cdot\psi)(x,y)=\psi\Big(\rho^{-1}(x,y)\Big)$ と変換する．

この変換に対して最低準位の u_{11} は不変であって，固有空間 H_1 は群 D_4 の恒

等表現 $R^{(1)} = I$ をあたえる．第1励起準位では

$$\rho(a)\cdot u_{12}(x,y) = u_{12}(y,-x) = u_{21}(x,y), \quad \rho(a)\cdot u_{21}(x,y) = -u_{12}(x,y)$$

となる．$\rho(b)$ の作用も求めて，$\psi = \alpha u_{12} + \beta u_{21}$ の係数の変換行列として書けば，D_4 の2次元表現が得られる：

$$R^{(12)}(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^{(12)}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

正方形Sの中に二つの粒子があり，相互作用はないとすれば，Schrödinger 方程式は波動関数 $U = U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ に対して

$$(\hat{\mathcal{H}}_1 + \hat{\mathcal{H}}_2)U = EU$$

である．ここに

$$\hat{\mathcal{H}}_k = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}\right) \qquad (k = 1, 2).$$

そして，$\boldsymbol{r}_k = (x_k, y_k)$ $(k = 1, 2)$ がSの境界上にあるとき $U = 0$．

エネルギー準位 $E = E_{n_x, n_y} + E_{m_x, m_y}$ の低い方から固有関数

$$U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = u_{n_x, n_y}(\boldsymbol{r}_1) u_{m_x, m_y}(\boldsymbol{r}_2)$$

を量子数 $(n_x n_y; m_x m_y)$ で書けば次の表のようになる．

E	$(n_x n_y; m_x m_y)$	縮退
4ε	(11,11)	1重
7ε	(11; 12), (11; 21), (12; 11), (21; 11)	4重
10ε	(12; 12), (12; 21), (21; 12), (21; 21)	4重
⋮	⋮	⋮

一例だが，ここに書いた最後の準位の固有空間における D_4 の表現を見よう．それは $\mathsf{H}_2 \times \mathsf{H}_2$ によるテンソル積表現になる．(2.49) により $R^{(12)\times(12)} = R^{(12)}(a) \times R^{(12)}$ だから

$$R^{(12)\times(12)}(a) = \begin{pmatrix} 0\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & -1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \\ 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & O \end{pmatrix}$$

$$R^{(12)\times(12)}(b) = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ O & & & 1 \end{pmatrix}.$$

この表現の簡約はメノコでできる．すなわち表現基底を

$$\Phi_{++} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[u_{12}u_{12} + u_{21}u_{21}\Big], \quad \Phi_{--} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[u_{12}u_{21} + u_{21}u_{12}\Big],$$
$$\Phi_{+-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[u_{12}u_{21} - u_{21}u_{21}\Big], \quad \Phi_{-+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[u_{12}u_{12} - u_{21}u_{21}\Big]$$

に変えればよい．同じことだが変換 $R' = \Gamma^{-1}R^{(12)\times(12)}\Gamma$ により

$$R'(a) = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ O & & & -1 \end{pmatrix}, \quad R'(b) = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ O & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & 1 & \\ & 1 & -1 & \\ 1 & & & -1 \end{pmatrix}$$

この行列から，あるいは直接に計算して

$$\rho(a)\cdot\boldsymbol{\Phi}_{\tau\sigma}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \tau\boldsymbol{\Phi}_{rs}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2),$$
$$\rho(b)\cdot\boldsymbol{\Phi}_{rs}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \sigma\boldsymbol{\Phi}_{\tau\sigma}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) \qquad (\tau,\sigma=\pm)$$

2粒子がポテンシアル $V_{12} = V_{12}(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)$ で相互作用するとしよう．この V は D_4の変換 (2.115) で不変だから，例 2.10 の (2.44) により，D_4の異なる表現の間に行列要素をもたない：

$$\langle\boldsymbol{\Phi}_{\tau',\sigma'}, V_{12}\boldsymbol{\Phi}_{\tau,\sigma}\rangle = 0 \qquad (\tau\neq\tau' \text{ and/or } \sigma\neq\sigma')$$

これを直接に確かめることも容易である．表現 $\rho(g)$ をはさんで，積分の変数変換から得る

$$\langle\boldsymbol{\Phi}_{\tau',\sigma'}, (\rho(g)\cdot V)\boldsymbol{\Phi}_{\tau,\sigma}\rangle = \langle\rho(g)\cdot\boldsymbol{\Phi}_{\tau',\sigma'}, V_{12}\rho(g)\cdot\boldsymbol{\Phi}_{\tau,\sigma}\rangle$$

に注意すればよい．$g=a$ または $g=b$ で左辺と右辺の符号が異なるからである．2粒子系の相互作用なしの場合のエネルギー準位 $E_{12,12}$ は，V の1次の摂動によって，一般に

$$E_{12,12;r,s} = E_{12,12} + \langle \Phi_{r,s}, V_{12}\Phi_{r,s} \rangle \qquad (\tau, \sigma = \pm)$$

の4本に分裂する．こうして，準位に縮退があるにもかかわらず，摂動エネルギーが V の対角要素のみの計算でもとめられた．なお，2粒子の交換に関し Φ_{+-} は反対称，他は対称である．

次に同じ範疇だが，もっと興味深い例を紹介しよう．

(c) ベンゼンの π 電子準位

ベンゼン C_6H_6 は，正六角形の頂点に並ぶ各炭素原子 C に放射状に水素原子 H が1個ずつ結合した分子である．単独の炭素原子は電子配置 $(1s)^2(2s)^2(2p)^2$ をもつ．ベンゼン分子においても，このうち 1s 電子は核の近くにあって化学結合に与らない．分子面に垂直に z 軸をとろう．2s と $2p_x$, $2p_y$ の波動関数は重ね合わせによって C から互いに 120° をなして伸びる腕となり，ここに3個の電子が入って H および両隣の C と共有結合 (σ 結合) しベンゼンの骨格をなす．残った1個の電子は，p_z 状態から以下のようにして作られる分子軌道 (π 軌道) に入って周回する．ベンゼンの励起状態をきめるのは，この π 電子である．

π 電子系のハミルトニアンは

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\mu=1}^{6} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_\mu + \sum_{j=1}^{6} \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4e^2}{r_{j\mu}} + V_\sigma(r_{j\mu}) \right) \right\} + \hat{\mathcal{H}}' \tag{2.116}$$

で与えられる．ただし，炭素核の電荷は $(1s)^2$ 電子に遮蔽されて $4e$ になっているとした．ここに $r_{j\mu}$ は炭素原子 j の核から π 電子 μ までの距離であり，$V_\sigma(r_{j\mu})$ は炭素原子 j の σ 電子が電子 μ の位置につくる静電ポテンシアル，そして

$$\hat{\mathcal{H}}' = \frac{1}{2}\sum_{\mu\neq\nu}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_{\mu\nu}} \tag{2.117}$$

は π 電子同士の静電相互作用 ($r_{\mu\nu}$ は電子 μ, ν の距離) である．

このハミルトニアンは，次の意味で群 D_{6h} (例 2.17) の変換で不変である．ベンゼン分子の中心を原点とし，C 原子1に向けて x 軸をとろう．そして，分子面内に y 軸を，面に垂直に z 軸をとる．群 D_{6h} は分子面内の回転 (群 C_6)，x 軸

まわりのπの回転C_2'，分子面に関する鏡映$\sigma_{\rm h}$から生成される．この群による位置ベクトル$\boldsymbol{r}$の変換は：

$$R(C_n)=\begin{pmatrix}\cos\gamma_n & -\sin\gamma_n & 0\\ \sin\gamma_n & \cos\gamma_n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad\left(\gamma_n=\frac{2\pi}{n},\ n=6,3,2\right)$$

$$R(C_2')=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad R(\sigma_{\rm h})=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{2.118}$$

このそれぞれに対して，電子の波動関数$\psi(\boldsymbol{r})$の変換を，(2.41) と同様に

$$(\hat{R}\Psi)(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_6)=\Psi(R^{-1}\boldsymbol{r}_1,\cdots,R^{-1}\boldsymbol{r}_6) \tag{2.119}$$

で定義すれば，(2.42) を導いたのと同様にして

$$\hat{R}^{-1}\hat{\mathcal{H}}\hat{R}=\hat{\mathcal{H}} \tag{2.120}$$

が得られる．これが上に述べたハミルトニアン$\hat{\mathcal{H}}$の不変性である．

いま，(2.116) の$\hat{\mathcal{H}}$を

$$\hat{\mathcal{H}}=\sum_{\mu=1}^{6}\hat{\mathcal{H}}_\mu^{(0)}+\hat{\mathcal{H}}',\quad \hat{\mathcal{H}}_\mu^{(0)}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_\mu+\sum_{j=1}^{6}V_{\rm scr}(r_{j\mu}) \tag{2.121}$$

と書く．$V_{\rm scr}$は (2.116) の ($\cdots$) であたえられ 1s 電子とσ電子で遮蔽された核のポテンシアルを表わす．**分子軌道** (molecular orbital) は$\hat{\mathcal{H}}_\mu^{(0)}$の固有関数$u(\boldsymbol{r}_\mu)$として定義される．$\hat{\mathcal{H}}'$を省略する近似では，$\pi$電子系のハミルトニアン$\hat{\mathcal{H}}$の固有関数は各$\pi$電子の分子軌道関数の積 (を反対称化したもの) であたえられる．$\hat{\mathcal{H}}_\mu^{(0)}$は$\boldsymbol{r}_\mu$を通してのみ$\mu$に依存するので，当分$\boldsymbol{r}_\mu$, $\hat{\mathcal{H}}_\mu$のμを省く．

原子軌道の線形結合 (LCAO, linear combination of atomic orbital) の方法は，$u(\boldsymbol{r})$を各 C 原子jの位置$\boldsymbol{a}_j$に局在した波動関数$v(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_j)\equiv\phi_j(\boldsymbol{r})$の線形結合

$$w(\boldsymbol{r})=\sum_{j=1}^{6}c_j\phi_j(\boldsymbol{r}) \tag{2.122}$$

で近似する．係数$\{c_j\}$は変分法などで定めるが，そのために期待値$\langle w,\hat{\mathcal{H}}_\mu w\rangle$を計算すると$\langle\phi_k,\hat{\mathcal{H}}\phi_j\rangle$などの交差積を含んで複雑になる．

ここでvとしてp_z軌道をとれば，それは，$\bar{\boldsymbol{r}}\equiv\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}_j$として

$$v(\bar{\boldsymbol{r}}) = \bar{z}f(\bar{r}) \qquad (\bar{\boldsymbol{r}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),\ \bar{r} = |\bar{\boldsymbol{r}}|) \tag{2.123}$$

という形なので，$\hat{R}(C_n)$ を $\hat{R}$ と略記するなどして

$$\begin{aligned} \hat{R}\phi_j(\boldsymbol{r}) &= v\Big(R^{-1}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_j\Big) = v\Big(\boldsymbol{r} - R\boldsymbol{a}_j\Big) \\ &= \phi_{j+6/n}(\boldsymbol{r}) \qquad (n = 6, 3, 2) \end{aligned} \tag{2.124}$$

が成り立つ．ただし，$j + 6/n$ は mod 6 で定義する．$8 - j$ も同じ mod 6 で

$$\hat{R}(C_2')\phi_j = -\phi_{8-j}, \quad \hat{R}(\sigma_h)\phi_j = -\phi_j \qquad (j = 1, \cdots, 6) \tag{2.125}$$

となるから，$\{\phi_j\}_{j=1,\cdots,6}$ を基底として群 $\mathrm{D_{6h}}$ の 6 次元表現ができる．これを $\mathit{\Gamma}$ とよび，表 2.5 の既約表現に分解すれば (2.44) により異なる既約表現の間の $\hat{\mathcal{H}}^{(0)}$ の行列要素は 0 となり，変分法の計算が簡単になる．$\hat{\mathcal{H}}^{(0)}$ も $\hat{\mathcal{H}}$ と同様に群 $\mathrm{D_{6h}}$ の変換で不変だからである．

さらに言えば，$\hat{\mathcal{H}}'$ も $\mathrm{D_{6h}}$ で不変なので，異なる既約表現の間の行列要素は 0 となり，$\hat{\mathcal{H}}'$ を摂動として取り入れる計算も楽になる．

そこで，$\mathrm{D_{6h}}$ の表現 $\mathit{\Gamma}$ を簡約しよう．まず，この表現の指標を求める．(2.124) によれば C_n はどの ϕ_j も動かすので指標は 0 である．C_2' は ϕ_1 と ϕ_4 の符号を変え，他の ϕ_j は別の j に移すので指標は -2 となる．同様に進んで表 2.10 の最後の行を得る．そこには $\chi^{(\mathit{\Gamma})}$ と書くべきところ，これまでの例にならい $\mathit{\Gamma}$ と略記した． この表の中段には表 2.5 の一部を転記したが，それは表現 $\mathit{\Gamma}$ の含む既約表現の数 m_μ を求める例を示すためである．公式 (2.112) により，$\mathit{\Gamma}$ における $\mathrm{A_{1g}}$ の重複度は共役類 i にわたる $s_i \times \chi^{(\mathrm{A_{1g}})}(i) \times \chi^{(\mathit{\Gamma})}$ の和を G の位数 24 で割れば得られ

$$m(\mathrm{A_{1g}}) = \frac{1}{24}\Big(1 \times 1 \times 6 + 3 \times 1 \times (-2) + 1 \times 1 \times (-6) + 3 \times 1 \times 2\Big) = 0$$

表 2.10　π 軌道が張る表現 $\mathit{\Gamma}$ の指標

$\mathrm{D_{6h}}$	e	$2C_6$	$2C_3$	C_2	$3C_2'$	$3C_2''$	I	σ_h	$2S_6$	$2S_3$	$3\sigma_v$	$3\sigma_d$
$\mathrm{A_{1g}}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
⋮						⋮						⋮
$\mathrm{A_{2u}}$	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	1
⋮						⋮						⋮
$\mathit{\Gamma}$	6	0	0	0	−2	0	0	−6	0	0	2	0

となる．Γ に A_{1g}は含まれないのである．また

$$m(A_{2u}) = \frac{1}{24}\Big(1 \times 1 \times 6 + 3 \times (-1) \times (-2) + 1 \times (-1) \times (-6) + 3 \times 1 \times 2\Big)$$

は 1 だから A_{2u}は一つ含まれる．同様に進んで，次の既約分解を得る：

$$\Gamma = A_{2u} + B_{2g} + E_{1g} + E_{2u}. \tag{2.126}$$

既約表現の基底を ϕ_jの線形結合として構成しよう．それには**射影演算子** (projection operator)

$$\hat{P}^{(\mu)}_{kl} = \frac{n_\mu}{|\mathsf{G}|}\sum_{a\in \mathsf{G}} R^{(\mu)}_{kl}(a^{-1})\hat{R}(a) \tag{2.127}$$

を用いるのが一法である．ただし，n_μは表現の次元．$\hat{P}^{(\mu)}_{kl}$は任意の関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ に作用して (1) ψ が表現 $R^{(\mu)}$の基底ベクトル $\boldsymbol{u}^{(\mu)}$の第 l 成分 $u^{(\mu)}_l$を含めば第 k 成分 $u^{(\mu)}_k$を，(2) 含まなければ 0 を与える (演習問題 2.9)．すなわち

$$\hat{P}^{(\mu)}_{kl}\psi = \langle u^{(\mu)}_l, \psi\rangle u^{(\mu)}_k. \tag{2.128}$$

(2.127) で $k = l$ とおき，これについて加えれば，$\sum_{l=1}^{n_\mu} \hat{P}^{(\mu)}_{ll}$ は

$$\hat{P}^{(\mu)} = \frac{n_\mu}{|\mathsf{G}|}\sum_{a\in \mathsf{G}} \chi^{(\mu)}(a^{-1})\hat{R}(a) \tag{2.129}$$

となり，(2.128) の右辺からわかるとおり

$$\hat{P}^{(\mu)}\psi = \sum_{l=1}^{n_\mu}\langle u^{(\mu)}_l, \psi\rangle u^{(\mu)}_l \tag{2.130}$$

のように ψ から既約表現 $R^{(\mu)}$の成分を取り出す．

ベンゼンの場合，$\psi = \phi_1$にとれば (2.129) と表 2.5 から $\sqrt{6}\cdot\hat{P}(A_{2u})\phi_1$として

$$u(A_{2u}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6) \tag{2.131}$$

が得られる．因子 $\sqrt{6}$ は $\langle\phi_j, \phi_k\rangle = \delta_{jk}$を仮定して規格化した結果である．表現 A_{2u}は 1 次元だから，(2.131) がそのまま表現基底になっている．同様に

$$u(B_{2g}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - \phi_4 + \phi_5 - \phi_6). \tag{2.132}$$

他方，

$$\hat{P}(E_{1g})\phi_1 = \frac{1}{12}(2\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - 2\phi_4 - \phi_5 - \phi_6)$$

となるが，E_{1g}は2次元なので，さらにϕ_2なりをとって

$$\hat{P}(E_{1g})\phi_2 = \frac{1}{12}(\phi_1 + 2\phi_2 + \phi_3 - \phi_4 - 2\phi_5 - \phi_6)$$

を計算し，両者の線形結合で1次独立な2本の基底をつくるのである．こうして，たとえば

$$\begin{aligned} u(E_{1g}, 1) &= \frac{1}{2}(-\phi_2 - \phi_3 + \phi_5 + \phi_6) \\ u(E_{1g}, 2) &= \frac{1}{\sqrt{12}}(2\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - 2\phi_4 - \phi_5 + \phi_6) \end{aligned} \tag{2.133}$$

を得る．同様にして

$$\begin{aligned} u(E_{2u}, 1) &= \frac{1}{2}(-\phi_2 + \phi_3 - \phi_5 + \phi_6) \\ u(E_{2u}, 2) &= \frac{1}{\sqrt{12}}(-2\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - 2\phi_4 + \phi_5 + \phi_6). \end{aligned} \tag{2.134}$$

これらの基底を用いれば，群D_{6h}に関する対称性が明らかな物理量の行列要素は容易に計算することができる．

演習問題

2.1 二面体群D_nの生成系をa, bとする： $a^n = e,\ b^2 = e,\ bab = a^{-1}$.

(i) $n =$偶数の場合，次の表現行列によって定義される表現$R^{(1)}, \cdots, R^{(4)}, S^{(m)}$ $(0 < m < n/2)$ はD_nの既約表現の代表系をなすことを示せ $(k = 0, \cdots, n-1)$：

$$R^{(1)}(a^k) = 1, \quad R^{(1)}(ba^k) = 1;$$

$$R^{(2)}(a^k) = 1, \quad R^{(2)}(ba^k) = -1;$$

$$R^{(3)}(a^k) = (-1)^k, \quad R^{(3)}(ba^k) = (-1)^k;$$

$$R^{(4)}(a^k) = (-1)^k, \quad R^{(4)}(ba^k) = -(-1)^k;$$

$$S^{(m)}(a^k) = \begin{pmatrix} \omega^{mk} & 0 \\ 0 & \omega^{-mk} \end{pmatrix},$$

$$S^{(m)}(ba^k) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-mk} \\ \omega^{mk} & 0 \end{pmatrix} \qquad (\omega = e^{2\pi i/n}).$$

(ii) $n=$奇数の場合の D_nの既約表現の代表系をつくれ．

(iii) 表現行列の直交性 (2.34) を確かめよ．

2.2 例 2.4 で得た D_4のユニタリ表現行列は前問のどれとも異なるが，実は，前問の表現の一つとユニタリ同値であることを示せ．

2.3 xy 平面上にあって原点に重心をもち，頂点の一つが x 軸上にある正三角形は，原点のまわりの角 $2\pi/3$ の回転 C_3，x 軸のまわりの角 π の回転 σ_x から生成される位数 6 の群 $\mathrm{C}_{3\mathrm{v}}$に関して不変である．この群の操作により点 (x,y) が $\rho\cdot(x,y)$ に移されるとき関数 f の変換を次式で定義する：$(\rho f)(x,y)=f(\rho^{-1}\cdot(x,y))$.

(i) $f_x(x,y)=x$, $f_y(x,y)=y$ とおけば ρ の作用は

$$\rho(C_3)(f_x,f_y)=(f_x,f_y)\begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix},$$

$$\rho(\sigma_x)(f_x,f_y)=(f_x,f_y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

となることを確かめ，他の $a\in\mathrm{C}_{3\mathrm{v}}$ に対する行列も求めよ．これらの行列を $R^{(\mathrm{E})}(a)$ と書く．こうして得られた $C_{3\mathrm{v}}$の表現は既約か?

(ii) $\{f_x,f_y\}$ を基底として $\psi=\alpha f_x+\beta f_y$ とおき，$\rho\cdot\psi$ をあらためて基底で展開するときの係数の変化は，上の行列 $R^{(\mathrm{E})}$を用いて

$$\rho\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=R^{(\mathrm{E})}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

と書けることを確かめよ．

(iii) 基底ベクトルを $f_{xx}=x^2$, $f_{xy}=xy$, $f_{yy}=y^2$にとって $\mathrm{C}_{3\mathrm{v}}$の表現行列をつくれ．その表現は既約か？

2.4 群 $\mathrm{C}_{2\mathrm{v}}$の指標表 (表 2.9) をつくれ．

2.5 対称群のすべての互換に -1 を対応させると 1 次元表現が得られる．これを完全反対称な表現という．これを用いて量子力学の Pauli の排他律を述べよ．

2.6 対称群 S_nの既約ユニタリ表現 $U^{(n,S)}$を $n=2,3,5$ に対してつくれ．

2.7 三つのスピンの状態からつくった対称群 S_3の表現行列 $R^{(2)}$が (2.96) に与えられている．これらが実際に表現になっていること，すなわち

$$\rho(g)(\boldsymbol{u}_{0;1/2,1/2},\boldsymbol{u}_{1;1/2,1/2})=(\boldsymbol{u}_{0;1/2,1/2},\boldsymbol{u}_{1;1/2,1/2})R^{(2)}(g)\quad(g\in\mathrm{S}_3)$$

をみたすことを確かめよ．$\boldsymbol{u}_{\dots}$は (2.94), (2.95) に与えられている．

2.8 対称群 S_n の既約表現 $[\lambda] = [\lambda_1, \cdots, \lambda_\nu]$ における共役類 (k) (演習問題 1.10, 1.11 参照) の指標は $m \geqq \nu$ として

$$s_1^{k_1} s_2^{k_2} \cdots s_n^{k_n} |x_1^{m-1}, x_2^{m-2}, \cdots, x_m^0| = \sum_{[\lambda]} \chi^{[\lambda]}(k) |x_1^{l_1}, x_2^{l_2}, \cdots, x_m^{l_m}|$$

から求められるという*19．ここに

$$s_q = x_1^q + \cdots + x_m^q \qquad (q = 1, \cdots, n),$$
$$l_j = \lambda_j + m - j \qquad (j = 1, \cdots, m),$$
$$|x_1^{l_1}, x_2^{l_2}, \cdots, x_m^{l_m}| = \begin{vmatrix} x_1^{l_1} & x_1^{l_2} & \cdots & x_1^{l_m} \\ x_2^{l_1} & x_2^{l_2} & \cdots & x_2^{l_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_m^{l_1} & x_m^{l_2} & \cdots & x_m^{l_m} \end{vmatrix}$$

(i) S_2 の指標を求めよ．

(ii) S_n $(n = 3, 4, 5)$ の指標を求めよ．

(iii) 単位元に対する $\chi^{[\lambda]}$ をもとめよ．これは表現 $D^{[\lambda]}$ の次元を与える．

2.9 表現行列の直交性 (2.34) を用いて，(2.127) が，任意の関数 ψ に作用して G の表現 $R^{(\mu)}$ の基底ベクトルの第 l 成分をとりだす射影演算子であることを証明せよ．

2.10 二面体群 D_4 の誘導表現を部分群 $H = \{e, a, a^2, a^3\}$ の表現からつくれ．

2.11 水分子 H_2O の変形のエネルギーは，距離 OH の変化 δl に応ずる $(k/2)(\delta l)^2$ と $\angle$HOH の変化 $\delta\theta$ に応ずる $(b/2)(\delta\theta)^2$ の和からなる．k と b は正の定数である．

水分子の各原子がつりあいの位置にあるとき，O の位置に相対的な H の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2$ とする．それぞれの H が $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ だけ変位し，O が $\boldsymbol{r}_0$ だけ変位したときの $\angle$ HOH は

$$\cos\angle\mathrm{HOH} = \boldsymbol{R}_1' \cdot \boldsymbol{R}_2' / (R_1' R_2')$$
$$(\boldsymbol{R}_1' := \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0,\ \boldsymbol{R}_2' := \boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0)$$

から求められ，各原子の変位につき1次までの近似で

$$\delta\theta = \frac{1}{2R^2\sqrt{1-\alpha^2}} \Big\{ (1+\alpha)(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2) \cdot (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) - (1-\alpha)(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2) \cdot (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 - 2\boldsymbol{r}_0) \Big\}$$

---

*19 これを Frobenius の指標公式という．参照：[6], [10].

となる．ここに $R := |\boldsymbol{R}_1| = |\boldsymbol{R}_2|$, $\alpha := \boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_2 / R^2$ である．図 1.4 の座標軸をとる．各原子の変位を (2.113) より次のように仮定し水分子の固有振動を見いだせ．

対称性	$\boldsymbol{r}_0$	$\boldsymbol{r}_1$	$\boldsymbol{r}_2$
A_1	$(0, 0, z_0)$	$(x, 0, z)$	$(-x, 0, z)$
B_1	$(x_0, 0, 0)$	$(x, 0, z)$	$(x, 0, -z)$

2.12 ベンゼンにおける π 電子の 1 体エネルギー準位を計算せよ．ただし，次の Hückel 近似をしてよい：(1) 異なる原子の原子軌道関数 ϕ_j は互いに直交する，(2) 核 j の遮蔽された Coulomb ポテンシアル V_{scr} を用いた (2.121) の $\mathcal{H}_\mu^{(0)}$ の行列要素は，$\boldsymbol{r}_j$ を核 j からの距離として

$$\int \phi_j(\boldsymbol{r}_\mu), \mathcal{H}_\mu^{(0)} \phi_k(\boldsymbol{r}_\mu) \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\mu = \begin{cases} \alpha & (k = j) \\ \beta & (k = j+1 \pmod 6) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とする，(3) π 電子の間の相互作用は無視する．

2.13 水素原子において，電子の波動関数が

$$\{x^2, y^2, 3z^2 - r^2, xz, yz\} \times f(r) \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

の形をした状態 (d 状態) のエネルギー準位は縮退している．水素原子を正四面体の対称性をもつポテンシアルの中心におくと，縮退は解けて 3 重+1 重+1 重になることを示せ．

2.14 正四面体を不変にする回転の群 T (正四面体群，tetrahedral group) は各頂点を通る軸 (4 本) のまわりの $2\pi/3$ の回転 C_3 と C_3^2，相対する辺の中点を通る軸 (3 本) のまわりの π の回転 C_2 に単位元 e を加えた 12 個の元をもつ．指標表は $\omega = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3}$ として次のようになることを確かめよ．

	e	$3C_2$	$4C_3$	$4C_3^2$
A	1	1	1	1
E_1	1	1	ω	ω^2
E_2	1	1	ω^2	ω
T	3	-1	0	0

2.15 結晶に電場 $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$ をかけたとき誘起される電気分極ベクトル $\boldsymbol{P} = (P_x, P_y, P_z)$ は一般に

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j \qquad (i, j = x, y, z)$$

で与えられる．α_{ij}は分極率テンソルとよばれ，結晶によってきまる定数であることが知られている．特に，結晶が立方体の対称性をもつ場合には行列 (α_{ij}) は単位行列の定数倍であることを示せ．ただし，この行列は対称であると仮定する．

2.16 一様な正三角形の板は，慣性能率テンソルの対称性に関して一様な円盤と同じであることを示せ．

2.17 原子の n 電子系のエネルギー固有関数Φは合成スピンの (大きさ)^{2}と z 成分との固有状態でよく近似される．それぞれの固有値を $S(S+1)\hbar^2$, $M_S\hbar$ とし，スピン多重項の $f_S^{(n)}$重の縮退を k で区別して $\Phi = \sum_k \Psi_k \Theta_{S,M_S,k}$ と書こう．Ψ_k は電子の座標 $\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_n$の関数である．Pauli の排他律により任意の置換 P に対して $P\Phi = \varepsilon_P \Phi$ となる．ここに，ε_Pは P が偶置換なら 1, 奇置換なら -1 である．次の式を順に導け．(v_{hk}) はスピンの置換の表現行列である．$u_{hj}(P) = \varepsilon_P v_{hj}$ とおく．

(i) $P(\sum_k \Psi_k \Theta_k) = \sum_h \sum_k (P\Psi_k) v_{hk}(P) \Theta_h$

(ii) $\varepsilon_P \sum_h \overline{v_{hj}}(P) \Psi_h = \sum_k P\Psi_k \delta_{jk}$

(iii) $P\Psi_j = \sum_h u_{hj}(P) \Psi_h \qquad (h, j = 1, \cdots, f_S^{(n)})$

いま $\Psi^0 = \phi_1(\boldsymbol{r}_1) \cdots \phi_n(\boldsymbol{r}_n)$ とし，$\phi_1, \cdots \phi_n$はどれも互いに直交しているとする．

(iv) $\Psi_{mk} = \sqrt{f_S^{(n)}/n!} \sum_P u_{mk}(P^{-1}) P\Psi^0$は，$m$ を固定して $\{\Psi_{mk}\}_{k=1,\cdots,f_S^{(n)}}$の組と見れば Pauli の排他律の条件 (iii) をみたすことを示せ．

(v) スピン関数を補った次の Φ_mは互いに独立であることを確かめよ：

$$\Phi_{m,S,M_S} = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_k \sum_P u_{mk}(P^{-1}) P\Psi^0 \cdot \Theta_{S,M_S,k} \qquad (m = 1, \cdots, f_S^{(n)}).$$

(vi) 電子系のハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}$ は電子の座標のみで書かれ $a, b = 1, \cdots, n$ にわたる和 $\hat{\mathcal{H}} = \sum_a \hat{\mathcal{H}}_1(\boldsymbol{r}_a) + \sum_{a \neq b} \hat{\mathcal{H}}_2(\boldsymbol{r}_a, \boldsymbol{r}_b)$ の形であるとする．(v) の波動関数の間の $\hat{\mathcal{H}}$ の行列要素を計算せよ．(参考：[49], §46)

第3章

位相構造

群の要素が連続パラメタをもち，それに関して群の演算が連続なものを連続群という．この章では連続性を記述する位相 (topology) の諸概念を導入する．

§3.1 開集合と閉集合

Euclid 空間 R^nの点 $\boldsymbol{x}$ の位置を $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ のように表わす．2 点 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の距離は

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

で与えられる．R^nの点 $\boldsymbol{a}$ と正数 r が与えられたとき，次の二つの集合

$$\mathsf{B}(\boldsymbol{a},r)=\{\boldsymbol{x}\in\mathsf{R}^n:\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<r\},\quad \overline{\mathsf{B}}(\boldsymbol{a},r)=\{\boldsymbol{x}\in\mathsf{R}^n:\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\leqq r\}$$

を，それぞれ $\boldsymbol{a}$ を中心とし r を半径とする**開球** (open ball)，**閉球** (closed ball) という．

定義 3.1 R^nの部分集合 E のどの点に対しても，それを中心とする適当な半径の開球が E に含まれるとき，E を**開集合** (open set) という．空集合は開集合と約束する． □

例 3.1 R^n $(n=1,2,\cdots)$ において開球は開集合である．実際，$\mathsf{E}=\mathsf{B}(\boldsymbol{a},r)$ とおき $\boldsymbol{x}\in\mathsf{E}$ とすれば $\delta:=r-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|$ は正で $\mathsf{B}(\boldsymbol{x},\delta)\subset\mathsf{E}$ となる． □

例 3.2 R において開区間 (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$ は開集合である． □

次の定理は，開集合を特徴づける．

定理 3.1 Euclid 空間 R^nにおいて

(i) R^n自身および空集合$\emptyset$は開集合である．

(ii) 任意個の開集合の合併 (union) は開集合である．

(iii) 有限個の開集合の共通部分 (intersection) は開集合である．

［証明］ (i) 定義 3.1 から明らか．

(ii) 与えられた開集合族$\{\mathsf{G}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$の合併$\mathsf{E} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{G}_\lambda$から任意に$\boldsymbol{x}$をとれば$\boldsymbol{x} \in \mathsf{G}_{\lambda_0}$となる$\lambda_0$が存在する．ところが$\mathsf{G}_{\lambda_0}$は開集合だから$\boldsymbol{x}$を中心とする開球を含み，それはEに含まれる．

(iii) 与えられた有限個の開集合$\mathsf{G}_i (i = 1, \cdots, k)$の共通部分$\mathsf{F} := \bigcap_{i=1}^{k} \mathsf{G}_i$に点$\boldsymbol{x}$をとれば，各$\mathsf{G}_i$は$\boldsymbol{x}$を中心とする開球を含むので，その最小の半径を$\delta_0$とすれば開球$\mathsf{B}(\boldsymbol{x}, \delta_0)$はどの$\mathsf{G}_i$にも含まれ，したがってFに含まれる． ∎

ここで，R^nをXとおき，Xの開集合の全体を$\mathcal{O}$としよう．上の定理は次のように書きかえることができる．

O1. $\mathsf{X} \in \mathcal{O}$, $\emptyset \in \mathcal{O}$.

O2. $\mathcal{O}$の任意個の元G_λ $(\lambda \in \Lambda)$の合併は，また$\mathcal{O}$に属する: $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{G}_\lambda \in \mathcal{O}$.

O3. $\mathcal{O}$の有限個の元G_i $(i = 1, \cdots, k)$の共通部分は，また$\mathcal{O}$に属する: $\bigcap_{i=1}^{k} \mathsf{G}_i \in \mathcal{O}$.

位相の概念は，これを公理化することで得られる．すなわち

定義 3.2 Xを空でない集合とし，Xの部分集合の集合$\mathcal{O}$で性質O1.–O3.をもつものをXにおける**位相** (topology) とよび，組$(\mathsf{X}, \mathcal{O})$を**位相空間** (topological space) という．$\mathcal{O}$の元を開集合とよぶ．$\mathcal{O}$が何であるか明らかなときはXを位相空間という． □

Xの部分集合の集合$\mathcal{B}$が$\mathcal{O}$に含まれ，かつ$\mathcal{O}$の任意の元が$\mathcal{B}$の元の (有限個とは限らない) 合併で表わせるとき，$\mathcal{B}$を$(\mathsf{X}, \mathcal{O})$の (または$\mathcal{O}$の) **基底** (basis) という．

定理 3.2 Xを空でない任意の集合とする．Xの部分集合からなる集合$\mathcal{B}$がXにおける位相の基底となるためには，$\mathcal{B}$の任意有限個の元の共通部分が$\mathcal{B}$の(有限個とは限らない)元の合併で表わせることが必要十分である．

［証明］ 必要なことは明らか．十分なことは，$\mathcal{B}$の元の合併で表わされる集合の全体を$\mathcal{O}$にとればわかる． ∎

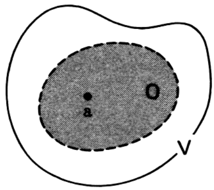


図 3.1

定義 3.3 位相空間 X の点 a と X の部分集合 V に対し $a \in O \subset V$ をみたす開集合 O が存在するとき，V を a の**近傍** (neighborhood) という (図 3.1). □

明らかに，a を含む開集合は a の近傍である．これを a の**開近傍** (open neighborhood) という．

定理 3.3 位相空間 X の部分集合 E が開集合であるための必要十分条件は，E が自身の各点の近傍になっていることである．

[証明] $\Longrightarrow$: 明らか．

$\Longleftarrow$: E が点 a の近傍なら a を含む開集合 $O_a \subset E$ が存在し $E = \bigcup_{a \in E} O_a$. よって，O2. により E は開集合である． ∎

点 a の近傍からなる集合 $\mathcal{N}_a$ は，a のどの近傍 V に対しても，それに含まれる $U \in \mathcal{N}_a$ があるなら，a の**基本近傍系** (fundamental system of neighborhoods) という．

例 3.3 R^n において $\{B(\boldsymbol{a}, r) | r > 0\}$ は $\boldsymbol{a}$ の基本近傍系をなす． □

定義 3.4 位相空間において，集合 F は，その補集合 F^c が開集合なら，**閉集合** (closed set) であるという． □

例 3.4 R^n において閉球 $B(\boldsymbol{a}, r)$ は閉集合である．実際，その補集合 E から任意に 1 点 $\boldsymbol{x}$ をとれば $\delta := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| - r$ は正で $B(\boldsymbol{x}, \delta) \subset E$ となる． □

例 3.5 R において $[a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ は，どれも閉集合である． □

開集合と閉集合は排他的ではない．全空間や空集合は開かつ閉な集合の例である．$0 < a < b$ とするとき $\{\boldsymbol{x} \in R^n | a < \|\boldsymbol{x}\| \leqq b\}$ は開でも閉でもない．次の定理は，開集合に対する定理 3.1 と照応し，閉集合を特徴づける．

定理 3.4 位相空間 X において，閉集合の全体を $\mathcal{F}$ とすれば

C1. $X \in \mathcal{F}$, $\emptyset \in \mathcal{F}$.

C2. 任意個の閉集合 F_λ の共通部分は閉集合である：$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$ (Λ は任意).

C3. 有限個の閉集合 F_iの合併は閉集合である: $\bigcup_{i=1}^{k} \mathsf{F}_i \in \mathcal{F}$ (k は有限).

［証明］ 定義 3.3 と次の de Morgan の法則による.

$$\left(\bigcap_{\lambda} \mathsf{S}_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda} \mathsf{S}_\lambda^c, \quad \left(\bigcup_{i} \mathsf{S}_i\right)^c = \bigcap_{i} \mathsf{S}_i^c$$ ∎

集合 E を含むすべての閉集合の共通部分を E の**閉包**(closure)といい，$\bar{\mathsf{E}}$ と記す. これは E を含む最小の閉集合である. したがって，E が閉集合であるためには $\mathsf{E} = \bar{\mathsf{E}}$が必要十分である.

定理 3.5 $\mathrm{a} \in \bar{\mathsf{E}} \iff$ a の任意の近傍 V に対し $\mathsf{V} \cap \mathsf{E} \neq \emptyset$.

［証明］ E を含む閉集合の全体を $\{\mathsf{F}_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ とする.

$\Longrightarrow$: $\mathrm{a} \in \bar{\mathsf{E}} \Longrightarrow \forall\lambda \in \Lambda$に対し $\mathrm{a} \in \mathsf{F}_\lambda$だから $\mathrm{a} \notin \mathsf{F}_\lambda^c$. ところが $\{\mathsf{F}_\lambda^c | \lambda \in \Lambda\}$ は E^cに含まれるすべての開集合の集合なので E^cは a の近傍ではあり得ない. ゆえに a の任意の近傍 V は $\mathsf{V} \cap \mathsf{E} \neq \emptyset$となる.

$\Longleftarrow$: 上の推論を逆にたどる. ∎

この定理の“任意の近傍”は“a の一つの基本近傍系の任意の元”でよい.

定理 3.6 R^n において

(i) $\mathrm{a} \in \bar{\mathsf{E}}$の必要十分条件は a に収束する E の点列が存在すること.

(ii) 集合 E が閉集合であるための必要十分条件は，収束する E のどんな点列の極限点もまた E に属することである.

［証明］ (i) 省略.

(ii) $\Longleftarrow$: $\mathrm{a} \in \bar{\mathsf{E}}$ とすれば (i) から a に収束する点列が存在するので定理の仮定により $\mathrm{a} \in \mathsf{E}$ となり $\bar{\mathsf{E}} \subset \mathsf{E}$. 他方 $\bar{\mathsf{E}} \supset \mathsf{E}$ だから $\bar{\mathsf{E}} = \mathsf{E}$.

$\Longrightarrow$: $\bar{\mathsf{E}} = \mathsf{E}$ とする. E の収束する点列の極限 a は (i) により $\bar{\mathsf{E}}$ に属するので E にも属する. ∎

位相空間 X の 1 点を a，部分集合を E とする. a の任意の近傍 V が a 以外の E の点を含むなら a を E の**集積点** (accumulating point) という. E の点であって集積点でないものを E の**孤立点** (isolated point) という. 集合 E が閉集合であるためには，E の集積点がすべて E に属することが必要十分である.

集合 E が点 a の近傍であるとき，a を E の**内点** (interior point) という. 開集合とは，内点のみからなる集合である. E^cの内点を E の**外点** (exterior point) という. E の内点でも外点でもない点を E の**境界点** (boundary point) といい，境

界点の全体を**境界** (boundary) とよび E^b と記す．

定理 3.7 $E^b = \overline{E} \cap \overline{E^c}$. よって，境界は常に閉集合である．

［証明］

$$\begin{cases} \text{a が E の内点} \iff \text{a のある開近傍 } U_1 \text{ に対し } U_1 \subset E \\ \text{a が E の外点} \iff \text{a のある開近傍 } U_2 \text{ に対し } U_2 \subset E^c \end{cases}$$

なので

a が E の境界点

$\iff$ a の任意の開近傍 U に対し $U \cap E \neq \emptyset$ かつ $U \cap E^c \neq \emptyset$

$\iff$ a の任意の近傍 V に対し $V \cap E \neq \emptyset$ かつ $V \cap E^c \neq \emptyset$

$\iff$ $a \in \overline{E}$ かつ $a \in \overline{E^c}$. ∎

集合 E は，$\overline{E} = X$ をみたすとき X において**稠密** (dense) であるという．たとえば，有理数全体 Q は R において稠密であり，Q^n は R^n において稠密である．

X の基底 $\mathcal{B}$ は，その元がたかだか可算個のとき**可算基底** (countable basis) という．

定理 3.8 R^n は可算基底をもつ．

［証明］ $\mathcal{B} = \{B(\boldsymbol{a}, r) | \boldsymbol{a} \in Q^n, r \in Q\}$ とおけば，R^n の任意の空でない開集合は $\mathcal{B}$ の元の合併で表わすことができる． ∎

位相空間 X の任意の異なる 2 点 a, b に対して

$$a \in G, \quad b \in H, \quad G \cap H = \emptyset$$

をみたす開集合 G, H がとれるなら，X を **Hausdorff 空間**という (図 3.2)．

例 3.6 R^n は Hausdorff 空間である． □

定理 3.9 Hausdorff 空間 X において有限個の点からなる集合は閉集合である．

［証明］ 定理 3.4 により，1 点からなる集合 {a} が閉集合であることを示せば

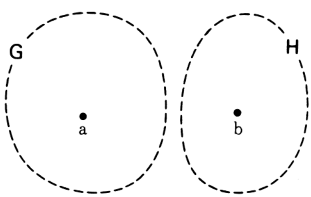


図 3.2

よい．b を $E := X - \{a\}$ の点とすれば，上記の開集合 G, H が存在し $b \in H \subset E$ となる．ゆえに，定理 3.3 により E は開集合である． ▮

§3.2 位相空間の部分空間

定義 3.5 S を位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の空でない部分集合とするとき，

$$\mathcal{O}_S = \{G \cap S | G \in \mathcal{O}\}$$

は S における位相となる．これを $\mathcal{O}$ から S に誘導された**相対位相** (relative topology) といい，位相空間 $(S, \mathcal{O}_S)$ を $(X, \mathcal{O})$ の**部分空間**という． □

定理 3.10 S を位相空間 X の部分空間とする．

(i) X および S における閉集合の全体をそれぞれ $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_S$ とすれば

$$\mathcal{F}_S = \{F \cap S | F \in \mathcal{F}\}.$$

(ii) a を S の点とし，a の X および S における近傍の全体をそれぞれ $\mathcal{N}_a$ および $\mathcal{N}_a^S$ とすれば

$$\mathcal{N}_a^S = \{V \cap S | V \in \mathcal{N}_a\}.$$

(iii) E を S の任意の部分集合とし，E の S における閉包を $\overline{E}^S$ と書けば

$$\overline{E}^S = \overline{E} \cap S.$$

［証明］ (i) 任意の $F \in \mathcal{F}$ に対し $S - (F \cap S) = (X - F) \cap S$ が成り立ち，右辺は S における開集合である．逆に任意の $A \in \mathcal{F}_S$ は X におけるある開集合 G によって $S - A = G \cap S$ をみたすので $A = (X - G) \cap S$．(ii), (iii) 略． ▮

S の部分集合 E が S において稠密であるためには $S \subset \overline{E}$ が必要十分である．実際，

$$\overline{E}^S \iff \overline{E} \cap S = S \iff S \subset \overline{E}.$$

例 3.7 $m > n$ のとき R^m から R^n に誘導される位相は R^n の本来の位相に一致する． □

例 3.8 開区間 (a, b) は R においては開集合だが，R^2 においては開集合でない．閉区間 $[a, b]$ は，どちらの空間でみても閉集合である． □

§3.3　写像の連続性

R^n から R^m への写像を f とする．f が R^n の点 $\boldsymbol{a}$ において連続であるとは，任意の正数 ε に対し適当な $\delta > 0$ が存在して

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})\| < \varepsilon$$

が成り立つことであった．これは

$$\boldsymbol{x} \in \mathsf{B}(\boldsymbol{a}, \delta) \quad \Longrightarrow \quad f(\boldsymbol{x}) \in \mathsf{B}\Big(f(\boldsymbol{a}), \varepsilon\Big)$$

とも言い表わされ，さらに

$$f\Big(\mathsf{B}(\boldsymbol{a}, \delta)\Big) \subset \mathsf{B}\Big(f(\boldsymbol{a}), \varepsilon\Big)$$

とも言える．これは $f(\boldsymbol{a})$ の任意の球状近傍 $\mathsf{B}\Big(f(\boldsymbol{a}), \varepsilon\Big)$ の逆像が $\boldsymbol{a}$ のある近傍になっていることであって，近傍を開球に限定せず次のように言ってもよい．

定理 3.11　写像 $f : \mathsf{R}^n \longrightarrow \mathsf{R}^m$ が R^n の点 $\boldsymbol{a}$ で連続であるための必要十分条件は，$f(\boldsymbol{a})$ の任意の近傍 V に対して原像 $f^{-1}(\mathsf{V})$ が $\boldsymbol{a}$ の近傍になることである．□

これを一般の位相空間にうつして

定義 3.6　X および Y を位相空間とする．写像 $f : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}$ が X の点 a で**連続** (continuous) であるとは，$f(\mathrm{a})$ の任意の近傍 V に対して $f^{-1}(\mathsf{V})$ が a の近傍になることをいう．f が R^n の各点で連続なら，f は X において連続であるという．□

定理 3.12　位相空間 X から Y への写像 f に関し次の命題は同値である：

(i)　f は X において連続．

(ii)　X の任意の部分集合 E に対し $f(\overline{\mathsf{E}}) \subset \overline{f(\mathsf{E})}$.

(iii)　Y の任意の閉集合 F の原像 $f^{-1}(\mathsf{F})$ は X の閉集合である．

(iv)　Y の任意の開集合 G の原像 $f^{-1}(\mathsf{G})$ は X の開集合である．

［証明］ (i) $\Longrightarrow$ (ii): $\forall \mathrm{x} \in \overline{\mathsf{E}}$ に対し $f(\mathrm{x})$ の任意の近傍を V とすれば，f の連続性より $f^{-1}(\mathsf{V})$ は x の近傍であるから定理 3.5 により $f^{-1}(\mathsf{V}) \cap \mathsf{E} \neq \emptyset$．したがって $\mathsf{V} \cap f(\mathsf{E}) \neq \emptyset$ となり $f(\mathrm{x}) \in \overline{f(\mathsf{E})}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): $\mathsf{A} = f^{-1}(\mathsf{F})$ とおけば，$f(\overline{\mathsf{A}}) \subset \overline{f(\mathsf{A})} \subset \overline{\mathsf{F}} = \mathsf{F}$ が成り立ち，$\overline{\mathsf{A}} \subset f^{-1}(\mathsf{F}) = \mathsf{A}$. 他方 $\overline{\mathsf{A}} \supset \mathsf{A}$ は明らかだから，$\overline{\mathsf{A}} = \mathsf{A}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): $\mathsf{X} - f^{-1}(\mathsf{G}) = f^{-1}(\mathsf{Y} - \mathsf{G})$ を用いる．

(iv) $\Longrightarrow$ (i): a を X の任意の点とする．V を f(a) の任意の近傍とすれば f(a) $\in \mathsf{G} \subset \mathsf{V}$をみたす Y の開集合 G が存在する．a $\in f^{-1}(\mathsf{G}) \subset f^{-1}(\mathsf{V})$ となり，(iv) により $f^{-1}(\mathsf{G})$ は開集合だから $f^{-1}(\mathsf{V})$ は a の近傍である．ゆえに f は a において連続． ∎

この定理により，写像 $f : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}$, $g : \mathsf{Y} \longrightarrow \mathsf{Z}$ が連続なら合成写像 $f \circ g : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Z}$ も連続，となる．

X, Y を位相空間とし，E を X の空でない部分集合とする．E から Y への写像の連続性は E の相対位相に関していうものとする．X から Y への連続な写像が与えられたとき，その定義域を E に制限した写像は，この意味でも連続となる．

定義 3.7 X, Y を位相空間とする．X から Y への全単射で，f も f^{-1}も連続なものが存在するとき X と Y は**同相** (homeomorphic) であるといい $\mathsf{X} \simeq \mathsf{Y}$と記す．このような f を X から Y への**同相写像** (homeomorphism) という． □

例 3.9 R の開区間 (a, b) は R と同相である．ここに $a < b$. □

［証明］ まず，開区間 $(-1, 1)$ が R と同相である．実際，関数

$$f(x) = \frac{x}{1 - |x|} : \quad (-1, 1) \longrightarrow \mathsf{R}$$

は連続な全単射で，逆関数

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1 + |x|} : \quad \mathsf{R} \longrightarrow (-1, 1)$$

も連続である．次に，$(-1, 1)$ が (a, b) と同相なことは，関数

$$g(x) = \frac{2}{b - a}\left(x - \frac{b + a}{2}\right) : \quad (a, b) \longrightarrow (-1, 1)$$

から知れる． ∎

そこで，合成写像 $f \circ g$を考える．

例 3.10 R^3内の単位球面 $\mathsf{S}^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ から北極 N $= (0, 0, 1)$ を除去した $\mathsf{S}^2 - \{\mathrm{N}\}$ を R^3の部分空間と考える．これと R^2は同相である．実際，立体射影 (stereographic projection，図 3.3)

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}\right) : \quad \mathsf{S}^3 - \{\mathrm{N}\} \longrightarrow \mathsf{R}^2$$

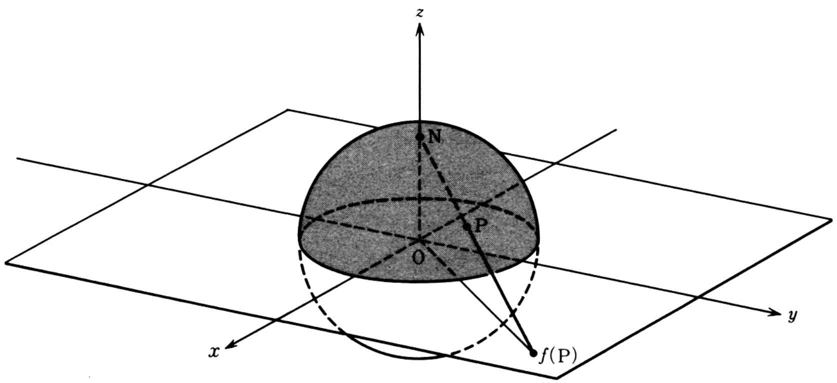


図 3.3

は，その逆関数

$$f^{-1}(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}\Big(2x,\, 2y,\, x^2+y^2-1\Big): \quad \mathsf{R}^2 \longrightarrow \mathsf{S}^3 - \{\mathrm{N}\}$$

とともに連続である． □

写像 $f : \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}$ は任意の開集合の像が開集合であるとき**開写像**という．連続な全単射が同相写像になるためには，開写像であることが必要十分である．

§3.4 直積位相

定義 3.8 X, Y を位相空間とする．

$$\mathcal{B} = \{\mathsf{G}\times\mathsf{H} \mid \mathsf{G}\in\mathcal{O}_\mathsf{X}, \mathsf{H}\in\mathcal{O}_\mathsf{Y}\}$$

は定理 3.2 に述べた条件をみたし，直積集合 X × Y の位相の基底にとれる．この位相を**直積位相** (product topology) といい，これを導入した X × Y を直積空間とよび，やはり同じ記号で表わす． □

例 3.11 R^{m+n} は R^m と R^n の直積空間である． □

定理 3.13 (a, b) を直積空間 X × Y の点とし $\mathcal{M}_\mathrm{a}$ を a の X における基本近傍系，$\mathcal{N}_\mathrm{b}$ を b の Y における基本近傍系とすれば

$$\mathcal{L}_{(\mathrm{a},\mathrm{b})} = \Big\{\mathsf{U}\times\mathsf{V} \mid \mathsf{U}\in\mathcal{M}_\mathrm{a},\, \mathsf{V}\in\mathcal{N}_\mathrm{b}\Big\}$$

は (a, b) の $\mathsf{X}\times\mathsf{Y}$における基本近傍系をなす．

［証明］ 明らか． ▮

定理 3.14 X, Y の部分集合 E, F に対し $\overline{\mathsf{E}\times\mathsf{F}} = \overline{\mathsf{E}}\times\overline{\mathsf{F}}$.

［証明］ 定理 3.5 の下に記した注意を用いる．

$(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \overline{\mathsf{E}\times\mathsf{F}}$

$\iff \forall\mathsf{W} \in \mathcal{L}_{(\mathrm{a},\mathrm{b})}$ に対して $\mathsf{W}\cap(\mathsf{E}\times\mathsf{F}) \neq \emptyset$

$\iff \forall\mathsf{U} \in \mathcal{M}_{\mathrm{a}}, \forall\mathsf{V} \in \mathcal{N}_{\mathrm{b}}$ に対し $(\mathsf{U}\times\mathsf{V})\cap(\mathsf{E}\times\mathsf{F}) \neq \emptyset$

$\iff \forall\mathsf{U} \in \mathcal{M}_{\mathrm{a}}, \forall\mathsf{V} \in \mathcal{N}_{\mathrm{b}}$ に対し $\mathsf{U}\cap\mathsf{E} \neq \emptyset$ かつ $\mathsf{V}\cap\mathsf{F} \neq \emptyset$

$\iff \mathrm{a} \in \overline{\mathsf{E}}$ かつ $\mathrm{b} \in \overline{\mathsf{F}}$

$\iff (\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \overline{\mathsf{E}}\times\overline{\mathsf{F}}$. ▮

この定理から，E, F が閉集合なら $\mathsf{E}\times\mathsf{F}$ も閉集合であることがわかる．

$\mathsf{X}\times\mathsf{Y}$から X への写像 $p(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{x}$ を**射影** (projection) という．これは全射で連続な開写像である．全射であることは明らか．連続性：X の任意の開集合 G に対し $p^{-1}(\mathsf{G}) = \mathsf{G}\times\mathsf{Y}$が開集合である．開写像であること：$\mathsf{O}$ を $\mathsf{X}\times\mathsf{Y}$における任意の開集合とすれば，これは $\mathcal{B}$ の元の合併で表わされること，

$$\mathsf{O} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{U}_\lambda\times\mathsf{V}_\lambda, \quad \mathsf{U}_\lambda\times\mathsf{V}_\lambda \in \mathcal{B}$$

から，O の像は開集合であることが知れる．

$$p(\mathsf{O}) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} p(\mathsf{U}_\lambda\times\mathsf{V}_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathsf{U}_\lambda.$$

射影 $q(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{y}$ についても同様である．

明らかに次の定理が成り立つ．

定理 3.15 $\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{Z}$ を位相空間とする．写像 $f : \mathsf{Z} \longrightarrow \mathsf{X}$, $g : \mathsf{Z} \longrightarrow \mathsf{Y}$から

$$h(\mathrm{z}) = \Big(f(\mathrm{z}), g(\mathrm{z})\Big) \qquad (\mathrm{z} \in \mathsf{Z})$$

によって写像 $h : \mathsf{Z} \longrightarrow (\mathsf{X}\times\mathsf{Y})$ を定義すれば，h が連続 $\iff$ f も g も連続． □

定理 3.16 Hausdorff 空間の直積は Hausdorff 空間である． □

§3.5 コンパクト性

X の部分集合 E と X の部分集合からなる集合族 $\mathcal{S} = \{S_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ が与えられたとき，$E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ となるなら $\mathcal{S}$ は E の**被覆** (covering) であるという．特に，S_λ がすべて開集合ならば，$\mathcal{S}$ を E の**開被覆** (open covering) という (図 3.4)．

定義 3.9 位相空間 X は，どんな開被覆が与えられても，その適当な有限部分族が X の被覆となるとき，**コンパクト** (compact) であるという．X の空でない部分集合 E がコンパクトであるとは，E を部分空間とみてコンパクトであることをいう．□

部分空間 E のコンパクト性は，X における開集合族 $\mathcal{S}$ による被覆が与えられたとして，その有限部分族で覆えること，としてもよい．その被覆と E との共通部分をとれば部分空間としての被覆になるからである．

X がコンパクトであることを，単に有限個の開集合で覆えること，と思ってはいけない．それだったら，X 自身が開集合なので常にそれで覆える．“どんな開被覆が与えられても，その中の有限個で” というところが核心である．これは，後に見るとおり無限の問題を有限に引き戻す．有限集合は，コンパクトである．

例 3.12 R^n はコンパクトではない．実際，開被覆 $\{B(0, n) | n \in N\}$ のどんな有限部分族も R^n を覆わない．□

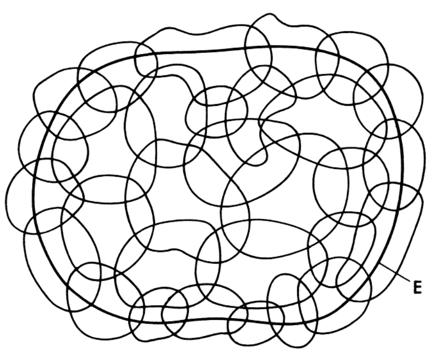


図 3.4　集合 E の被覆

例 3.13 有界閉区間$[a, b]$は R においてコンパクトである．実際，もしコンパクトでないとすれば，ある開被覆 $\{O_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ のどんな有限部分族も $[a, b]$ を覆わず，したがって $c_1=(a+b)/2$ として $[a, c_1], [c_1, b]$ の少なくとも一方は覆われない．こうして区間を二分しつつ覆われない方を選んでゆくと，ついに 1 点 α に収束する．これを覆う O_{λ_0} があるはずで，しかもある $\delta>0$ が存在して $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)\subset O_{\lambda_0}$．それなら分割を無限に進める前の有限の段階で O_{λ_0} で被覆ができてしまうことになり，矛盾に達した． □

X の部分集合からなる集合族は，そのどんな有限個の交わりも空でないなら，**有限交差性** (finite-intersection property) をもつという．この概念を用いればコンパクト性が閉集合の言葉で規定できる．

定理 3.17 位相空間 X がコンパクトであるための必要十分条件は，有限交差性をもつどんな閉集合族 $\{F_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ に対しても $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\neq\emptyset$ となることである．

［証明］ 定義 3.9 から X がコンパクトでないための必要十分条件は，X の開被覆 $\{O_\lambda ; \lambda\in\Lambda\}$ $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda=X\right)$ で，そのどんな有限部分族も X の被覆でない ($\bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} O_\lambda\neq X$, Λ_0 は Λ の任意の有限部分集合) ものが存在することだから，補集合 $F_\lambda=O_\lambda{}^C$ をとって言い換えれば，

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda_0} F_\lambda\neq\emptyset \text{ をみたす}\underline{\text{ある}}\text{閉集合族 } \{F_\lambda ; \lambda\in\Lambda\} \text{ に対して } \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda=\emptyset$$

が成り立つ．したがって X がコンパクトであるための必要十分条件は

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda_0} F_\lambda\neq\emptyset \text{ をみたす}\underline{\text{任意の}}\text{閉集合族 } \{F_\lambda ; \lambda\in\Lambda\} \text{ に対して } \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\neq\emptyset$$

が成り立つことである． ■

定理 3.18

(i) コンパクトな位相空間の閉集合はコンパクトである．

(ii) Hausdorff 空間のコンパクト集合は閉集合である．

［証明］ (i) X をコンパクト空間とし，F を X の閉集合とする．F の任意の開被覆に F^cを付加すれば X の開被覆になるから，その有限個で X が覆える．それから F^cを除けば F の有限開被覆が得られる．

(ii) X を Hausdorff 空間とし，K を X のコンパクト集合として，K^cが開集合であることを示そう．K^cの任意の点 a に対し，K の各点 x ごとに a の開近傍 U_x

と x の開近傍 V_x とを交わらないようにとれる．K はコンパクトだから，適当な有限個の点をとって $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i}$ にできる．これに対応して $U := \bigcap_{i=1}^{k} U_{x_i}$ をとれば $U \cap (\bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i}) = \emptyset$．すなわち $U \cap K = \emptyset$．したがって $U \subset K^c$ となり K^c は a の近傍であることがわかる．a は K^c の任意の点であったから，定理 3.3 により K^c は開集合である． ∎

定理 3.19 E を位相空間 X のコンパクト集合とする．E から位相空間 Y への写像 f が連続なら $f(E)$ はコンパクトである．

［証明］ $E = X$ の場合を証明すればよい．$\mathcal{S} = \{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ を $f(X)$ の任意の開被覆とすれば，$f(X) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ だから

$$X \subset f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(G_\lambda)$$

となり

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(G_\lambda).$$

ところが，定理 3.12 により $f^{-1}(G_\lambda)$ は X の開集合だから，X のコンパクトなことより適当な有限個の $G_{\lambda_1}, \cdots, G_{\lambda_k}$ で

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(G_{\lambda_i})$$

となり

$$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{k} G_{\lambda_i}.$$

こうして $f(X)$ は $\mathcal{S}$ の有限部分族で覆われた． ∎

定理 3.20 コンパクトな位相空間 X から Hausdorff 空間 Y への連続かつ全単射な写像は同相写像である．

［証明］ F を X の任意の閉集合とする．定理 3.18 の (i) により F はコンパクトで，前定理により $f(F)$ もコンパクト，したがって定理 3.18 の (ii) により $f(F)$ は閉集合である．ゆえに，定理 3.12 により f^{-1} も連続になるので f は同相写像である． ∎

R^n の部分集合 E は，ある開球に含まれるとき**有界** (bounded) であるという．

定理 3.21 位相空間 X, Y の部分集合 E, F の直積がコンパクトであるための

必要十分条件は，それらが共にコンパクトなことである．

［証明］ $\mathsf{E}=\mathsf{X}, \mathsf{F}=\mathsf{Y}$の場合を証明すればよい．

$\Longrightarrow$: $\mathsf{X}\times\mathsf{Y}$から$\mathsf{X}, \mathsf{Y}$への射影をそれぞれ$p, q$とすれば，これらは連続であるから定理3.19により$\mathsf{X}=p(\mathsf{X}\times\mathsf{Y})$はコンパクトである．Yも同様．

$\Longleftarrow$: $\mathcal{S}=\{\mathsf{O}_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$を$\mathsf{X}\times\mathsf{Y}$の開被覆とする．$\mathsf{X}\times\mathsf{Y}$の1点$(\mathrm{x}, \mathrm{y})$はある$\mathsf{O}_\lambda$に含まれるから，その$\lambda$の一つを$\lambda(\mathrm{x}, \mathrm{y})$とする．定理3.13によりxのある開近傍$\mathsf{G}_\mathrm{y}(\mathrm{x})$とyのある開近傍$\mathsf{H}_\mathrm{x}(\mathrm{y})$をとって$\mathsf{G}_\mathrm{y}(\mathrm{x})\times\mathsf{H}_\mathrm{x}(\mathrm{y})\subset\mathsf{O}_{\lambda(\mathrm{x},\mathrm{y})}$にできる．

$\{\mathsf{H}_\mathrm{x}(\mathrm{y}) : \mathrm{y}\in\mathsf{Y}\}$はYの開被覆であって，Yのコンパクト性からYのある有限部分集合Bをとって$\mathsf{Y}\subset\bigcup_{\mathrm{y}\in\mathsf{B}}\mathsf{H}_\mathrm{x}(\mathrm{y})$にできる．次に$\mathsf{U}_\mathrm{x}=\bigcap_{\mathrm{y}\in\mathsf{B}}\mathsf{G}_\mathrm{y}(\mathrm{x})$とおけば，これはxの開近傍であって$\mathsf{U}_\mathrm{x}\times\mathsf{Y}\subset\bigcup_{\mathrm{y}\in\mathsf{B}}\mathsf{O}_{\lambda(\mathrm{x},\mathrm{y})}$となる．他方，Xのある有限集合Aをとって$\mathsf{X}\subset\bigcup_{\mathrm{x}\in\mathsf{A}}\mathsf{U}_\mathrm{x}$にできる．ゆえに

$$\mathsf{X}\times\mathsf{Y}\subset\bigcup_{\mathrm{x}\in\mathsf{A}}\Big(\bigcup_{\mathrm{y}\in\mathsf{B}}\mathsf{O}_{\lambda(\mathrm{x},\mathrm{y})}\Big)$$

となり，$\mathsf{X}\times\mathsf{Y}$は$\mathcal{S}$の有限部分族で覆われた． ∎

定理 3.22 R^nにおいて，集合Eがコンパクトであるための必要十分条件は有界閉集合であること．

［証明］ $\Longrightarrow$: R^nはHausdorff空間なので定理3.18によりEは閉集合である．有界性は開被覆$\{\mathsf{B}(\boldsymbol{x},1)|\boldsymbol{x}\in\mathsf{E}\}$の有限個で覆われることからわかる．

$\Longleftarrow$: Eの有界性から，適当な有界閉区間の積で

$$\mathsf{E}\subset[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$$

にできる．有界閉区間$[a_i, b_i]$は例3.13によりコンパクトであり，その直積はコンパクトである(定理3.21)．よって，Eはコンパクト集合の閉部分集合となり，定理3.18によりコンパクトである． ∎

コンパクト性を弱めた次の概念も有用である．

定義 3.10 位相空間Xは，そのどの点もコンパクトな近傍をもつなら**局所コンパクト** (locally compact) であるという．Xの空でない部分集合Eが局所コンパクトであるとは，Eを部分空間とみて局所コンパクトであることをいう． □

例 3.14 R^nは局所コンパクトである．閉球$\mathsf{B}(\boldsymbol{a},r)$が点$\boldsymbol{a}$のコンパクトな近傍だから． □

定理 3.23 局所コンパクトな Hausdorff 空間 X において，X の任意の点 a のコンパクトな近傍全体 $\mathcal{N}_a$ は a の基本近傍系をなす．

［証明］ a の任意の近傍 V に対して U ⊂ V となる U ∈ $\mathcal{N}_a$ の存在を示す．

第 1 段 X がコンパクトな場合．a の任意の近傍 V に対し a ∈ O ⊂ V をみたす開集合 O が存在する．a ∉ O^c で {a} も O^c も閉集合なので

$$a \in G, \quad O^c \subset H, \quad G \cap H = \emptyset$$

をみたす開集合 G, H が存在する．G は a の近傍である．その閉包 $\overline{G}$ もそうであって，しかも定理 3.18 によりコンパクトなので $\mathcal{N}_a$ に属する．また，$G \subset H^c \subset O$ で，H^c は閉集合なので $\overline{G} \subset O \subset V$．よって，$\overline{G}$ を冒頭の U とすることができる．

第 2 段 X が局所コンパクトな場合．V を a の任意の近傍とする．a のコンパクト近傍が存在するので，その一つを S とすれば V ∩ S は S における a の近傍で，S はコンパクトだから，第 1 段により U ⊂ V ∩ S をみたす，a の S におけるコンパクト近傍 U が存在する．ところが S は a の X における近傍なので，定理 3.10 の (ii) により U は a の X における近傍となる．これを冒頭の U にとる． ∎

定理 3.24

(i) 局所コンパクトな位相空間の閉集合は，局所コンパクトである．

(ii) 局所コンパクトな Hausdorff 空間の開集合は，局所コンパクトである．

［証明］ (i) 局所コンパクトな位相空間 X の閉集合を F とする．F の任意の点 a に対して X におけるコンパクトな近傍 V が存在する．V ∩ F は F における a の近傍で，F における閉集合でもあるから定理 3.18 によりコンパクトである．こうして，a の F におけるコンパクトな近傍の存在が示された．

(ii) 局所コンパクトな Hausdorff 空間 X の開集合を O とする．定理 3.23 により，O の任意の点 a に対して，O に含まれる a のコンパクトな近傍 U が存在する．U は O における a の近傍でもあるから，O は局所コンパクトである． ∎

定理 3.25 (Baire の範疇定理) 局所コンパクトな Hausdorff 空間 X がたかだか可算個の閉集合 $\{F_m\}$ の合併で表わされるなら，それらのうち少なくとも一つは内点をもつ．

［証明］ どの F_m も内点をもたないと仮定する．X は局所コンパクトなので，空でない開集合 G で $\overline{G}$ がコンパクトなものが存在する．実際，X のどの点もコ

ンパクトな近傍をもつのだから，その内点の全体を G とすればよい．

仮定により，G は F_1の部分集合ではなく $G - F_1 \neq \emptyset$だから $G - F_1$の 1 点 a_1の開近傍 U_1を $\overline{U}_1 \subset G - F_1$かつ $\overline{U}_1$はコンパクトとなるようにとれる．したがって

$$\overline{U}_1 \cap F_1 = \emptyset, \quad \overline{U}_1 \subset G.$$

同様に $U_1 - F_2 \neq \emptyset$だから $U_1 - F_2$の 1 点 a_2の開近傍 U_2を $\overline{U}_2 \subset U_1 - F_2$かつ $\overline{U}_2$ はコンパクトとなるようにとれる．したがって

$$\overline{U}_2 \cap F_2 = \emptyset, \quad \overline{U}_2 \subset U_1.$$

この操作を続ければ

$$\overline{G} \supset \overline{U}_1 \supset \overline{U}_2 \supset \cdots \supset \overline{U}_n \supset \cdots$$

をみたす閉集合列 $\{U_n\}$ が得られる．ところが$\overline{G}$はコンパクトだから，定理 3.17 により

$$\bigcap_n \overline{U}_n \neq \emptyset$$

が成り立つ．一方，

$$\begin{aligned}\bigcap_n \overline{U}_n &= \left(\bigcap_n \overline{U}_n\right) \cap X = \left(\bigcap_n \overline{U}_n\right) \cap \left(\bigcup_m F_m\right) \\ &= \bigcup_m \left\{F_m \cap \left(\bigcap_n \overline{U}_n\right)\right\} \subset \bigcup_m \{F_m \cap \overline{U}_m\} \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

となり，これは矛盾である． ▮

§3.6 連結性

定義 3.11 位相空間 X は，自身と空集合 $\emptyset$ 以外に開かつ閉な集合をもたないとき**連結** (connected) であるという．X の空でない部分集合 E が連結であるとは，E を部分空間とみて連結なことをいう． □

X が連結でないとすれば，X と $\emptyset$ 以外に開かつ閉な集合 A_1が存在するから，$A_2 = A_1^c$とおけば A_2も開かつ閉な集合となり

$$X = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

が成り立つ．逆に，この式が成り立って A_1 も A_2 もともに空でない開集合ならば X は連結でない．よって，X が連結であるとは，互いに素な，ともに空でない二つの開 [閉] 集合の合併で表わされないこと，としてよい．

次に E を X の空でない部分集合とする．E が連結であるための必要十分条件は，X における，ともに空でない開 [閉] 集合 O_1, O_2 で

$$E \subset O_1 \cup O_2 \quad かつ \quad O_1 \cap O_2 \cap E = \emptyset$$

をみたすものは存在しないことである．

例 3.15 位相空間において 1 点からなる集合は連結である． □

例 3.16 R は連結である．もし連結でないとしたら，R は互いに素で，どちらも空でない二つの開集合 O_1, O_2 の合併で表わせる．そこで，二つからそれぞれ点 a, b を選ぶ．$a < b$ として一般性を失わない．

$$c := \sup(O_1 \cap [a, b])$$

とおけば，c は O_1，O_2 のいずれかに含まれる．$c \in O_1$ とすれば $c < b$ であり，O_1 は開集合だから，正数 δ を適当に選べば

$$c + \delta < b \quad かつ \quad c + \delta \in O_1$$

が成り立ち $c+\delta \in O_1 \cap [a, b]$ となるが，これは c の定義に反する．また，$c \in O_2$ とすれば，$a < c$ であり O_2 は開集合だから，正数 δ' を適当に選べば

$$a < c - \delta' \quad かつ \quad [c - \delta', c] \subset O_2$$

が成り立ち，$[c - \delta', c] \subset O_2 \cap [a, b]$ となり，したがって

$$[c - \delta', c] \cap (O_1 \cap [a, b]) = \emptyset.$$

ゆえに，$O_1 \cap [a, b]$ に属する任意の元は $c - \delta'$ より小さいか，c より大きい．これも c の定義に反する． □

例 3.17 開区間 (a, b) は R における連結集合である．なぜなら，これは例 3.9 で見たように R と同相であるから． □

定理 3.26 位相空間 X において集合 E が連結なら，$E \subset F \subset \overline{E}$ をみたす任意の集合 F は連結である．

［証明］ F が連結でなかったとすると，次式をみたす開集合 O_i $(i = 1, 2)$ が存在する：

$$F \subset O_1 \cup O_2, \quad O_1 \cap O_2 \cap F = \emptyset, \quad O_i \cap F \neq \emptyset$$

$E \subset F$ なので

$$\mathsf{E} \subset \mathsf{O}_1 \cup \mathsf{O}_2, \quad \mathsf{O}_1 \cap \mathsf{O}_2 \cap \mathsf{E} = \emptyset$$

他方，$\mathsf{O}_1 \cap \mathsf{F}$ の 1 点 a をとれば，O_1 は a の近傍で，$\mathrm{a} \in \mathsf{F} \subset \overline{\mathsf{E}}$ なので定理 3.5 により $\mathsf{O}_1 \cap \mathsf{E} \neq \emptyset$．同様に $\mathsf{O}_2 \cap \mathsf{E} \neq \emptyset$．したがって，E は連結でない．∎

定理 3.27 $\{\mathsf{E}_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ を連結集合の族とする．そのどの二つの元も共通部分をもつなら和集合 $\mathsf{E} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathsf{E}_\lambda$ は連結である．

［証明］

$$\mathsf{E} \subset \mathsf{O}_1 \cup \mathsf{O}_2 \quad \text{かつ} \quad \mathsf{O}_1 \cap \mathsf{O}_2 \cap \mathsf{E} = \emptyset$$

をみたす，X における任意の開集合を $\mathsf{O}_1, \mathsf{O}_2$ とする．$\mathsf{O}_1 \cap \mathsf{E}$ または $\mathsf{O}_2 \cap \mathsf{E}$ の一方が空集合となることを示せばよい．任意の λ に対して

$$\mathsf{E}_\lambda \subset \mathsf{O}_1 \cup \mathsf{E}_2 \quad \text{かつ} \quad \mathsf{O}_1 \cap \mathsf{O}_2 \cap \mathsf{E}_\lambda = \emptyset$$

が成り立ち，E_λ は連結なので各 λ に対し $\mathsf{O}_1 \cap \mathsf{E}_\lambda$ または $\mathsf{O}_2 \cap \mathsf{E}_\lambda$ が空集合となる．もし，ある λ_0 に対して $\mathsf{O}_1 \cap \mathsf{E}_{\lambda_0} = \emptyset$ となれば他のすべての λ に対しても同じく $\mathsf{O}_1 \cap \mathsf{E}_\lambda = \emptyset$ となることが示せれば，証明おわりである．仮にある λ_1 において $\mathsf{O}_1 \cap \mathsf{E}_{\lambda_1} \neq \emptyset$ となったとすれば $\mathsf{O}_2 \cap \mathsf{E}_{\lambda_1} = \emptyset$ であるから

$$\left(\mathsf{E}_{\lambda_0} \cap \mathsf{E}_{\lambda_1}\right) \cap \left(\mathsf{O}_1 \cup \mathsf{O}_2\right) - \emptyset$$

となるが，$\mathsf{E}_{\lambda_0} \cap \mathsf{E}_{\lambda_1} \subset \mathsf{E} \subset \mathsf{O}_1 \cup \mathsf{O}_2$ であるから

$$\mathsf{E}_{\lambda_0} \cap \mathsf{E}_{\lambda_1} = \emptyset.$$

これは定理の仮定に反する．∎

系 3.1 $\{\mathsf{E}_n\}$ を連結集合のたかだか可算族とする．$\mathsf{E}_n \cap \mathsf{E}_{n+1} \neq \emptyset$ $(n = 1, 2, \cdots)$ なら和集合 $\bigcup_n \mathsf{E}_n$ は連結である．

［証明］ $\mathsf{E}'_k := \bigcup_{l=1}^{k} \mathsf{E}_l$ とおき，これに定理を適用する．∎

系 3.2 X は，その任意の 2 点を含む連結集合が存在すれば連結である．

［証明］ X の点 x, y を含む連結集合の一つを C(x, y) とすれば $\mathsf{X} = \bigcup_{\mathrm{y} \in \mathsf{X}} \mathsf{C}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ であり，どの C(x, y) も x を共有している．∎

定理 3.28 E を位相空間 X の連結集合とする．E から位相空間 Y への写像が連続なら $f(\mathsf{E})$ は連結である．

［証明］ $\mathsf{E} = \mathsf{X}$ の場合について証明すればよい．$\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2$ を Y における開集合で

$$f(\mathsf{X}) \subset \mathsf{G}_1 \cup \mathsf{G}_2, \quad \mathsf{G}_1 \cap \mathsf{G}_2 \cap f(\mathsf{X}) = \emptyset$$

をみたすものとすれば

$$\mathsf{X} \subset f^{-1}(\mathsf{G}_1) \cup f^{-1}(\mathsf{G}_2), \quad f^{-1}(\mathsf{G}_) \cap f^{-1}(\mathsf{G}_2) = \emptyset$$

が成り立ち，f の連続性から $f^{-1}(G_i)$ $(i = 1, 2)$ は X における開集合であって，X が連結なことから，いずれかは空集合でなければならない．したがって，$G_i \cap f(X)$ $(i = 1, 2)$ のいずれかは空集合となり，$f(X)$ は連結である． ∎

定理 3.29 E, F をそれぞれ位相空間 X, Y の部分集合とする．$E \times F$ が連結であるための必要十分条件は，E も F も連結なことである．

［証明］ $\Longrightarrow$: 前定理を射影写像に適用する．

$\Longleftarrow$: (a, b) および (c, d) を $X \times Y$ の任意の 2 点とする．$\{a\} \times Y$, $X \times \{d\}$ は，それぞれ Y, X に同相であるから，ともに連結であり，点 (a, d) を共有するから定理 3.29 により

$$(\{a\} \times Y) \cup (X \times \{d\})$$

は連結である．この集合は 2 点 (a, b), (c, d) を含むので定理 3.27 の系 3.2 により $X \times Y$ は連結である． ∎

集合の連結性をいうもう一つの概念として，その 2 点をつなぐ経路によるものがある．X の空でない部分集合 E をとり，その 2 点を a, b とする．R の閉区間 $[0, 1]$ から E への連続写像 ψ で，$\psi(0) = a$, $\psi(1) = b$ となるものを，a と b を結ぶ E 内の**経路** (path) という．c を E の第 3 の点とするとき，a と b，b と c が E 内の経路で結べるなら a と c も E 内の経路で結べる．

定義 3.12 E を位相空間 X の空でない部分集合とする．E の任意の 2 点を結ぶ E 内の経路が存在するとき E は**弧状連結** (arcwise-connected) であるという．□

E が弧状連結であるためには，E の 1 点 a を固定し，これと E 内の任意の点が E 内の経路で結べることが必要十分である (図 3.5)．

例 3.18 R^n から有限個の点を除いた集合，および R^n の凸集合は，いずれも弧状連結である． □

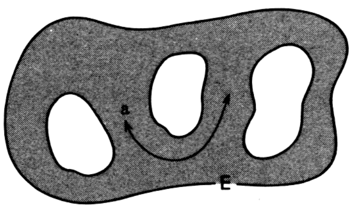


図 3.5

定理 3.30　E を位相空間 X の弧状連結集合とする．E から位相空間 Y への写像 f が連続なら $f(\mathsf{E})$ は弧状連結である．

［証明］連続な二つの写像の合成を考える．▮

R^{n+1} の部分集合 $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathsf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ を n 次元単位球面といい S^n で表わす．

例 3.19　S^n は弧状連結である．実際，$\mathsf{R}^{n+1} - \{0\}$ から S^n への写像 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\|$ は連続である．□

弧状連結性は連結性より強い．実際，

定理 3.31　弧状連結な集合は連結である．

［証明］E を弧状連結な集合とする．a, b を E の任意の 2 点とすれば，これらを結ぶ E 内の経路 ψ が存在する．その原像である閉区間 [0, 1] は連結であるから，定理 3.26 により $\psi([0,1])$ は連結集合で，これは a, b を含むから定理 3.27 の系 3.2 によって E は連結である．▮

この定理の逆は成り立たない．連結だが弧状連結でない集合が存在する (演習問題 3.14)．しかし，Euclid 空間の開集合については逆が成り立つ．

最後に重要な概念，単連結性を導入する，ただし，不自然さを避けるため，弧状連結な集合に限定して考える．

弧状連結な集合 E 内の経路 ρ で $\rho(0)=\rho(1)$ をみたすものを E 内の**ループ** (loop) といい，$\rho(0)=\rho(1)$ を ρ の**基点**という．特に閉区間 $[0,1]$ の ρ による像 $\rho([0,1])$ が E の 1 点 p からなるときは，この ρ を値 p をとる**定値のループ**といって 0_{p} で表わす．

定義 3.13　位相空間 X の弧状連結な集合 E において，同じ基点 p をもつ二つのループ ρ, σ に対して連続写像 $H:[0,1]\times[0,1]\to\mathsf{E}$ があって

$$H(0,t) = \rho(t), \quad H(1,t) = \sigma(t) \quad (\forall t \in [0,1])$$

$$H(s,0) = H(s,1) = \mathrm{p} \quad (\forall s \in [0,1])$$

が成り立つなら，ρ は σ に**ホモトープ** (homotopic) であるといい，

$$\rho \simeq \sigma \quad (\mathsf{E})$$

と記す．H を ρ から σ への**ホモトピー** (homotopy) という (図 3.6)．

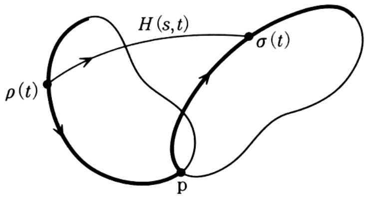


図 3.6 ホモトピー $H(s,t)$

ホモトープであるという関係は同値関係であることに注意しよう．反射律 $\rho\simeq\rho$，対称律 $\rho\simeq\sigma\Rightarrow\sigma\simeq\rho$ が成り立つことは明らかである．推移律 $\rho\simeq\sigma, \sigma\simeq\tau\Rightarrow\rho\simeq\tau$ の証明は次のようにする．ρ から σ へのホモトピーを H，σ から τ へのホモトピーを G とし，写像 $F: [0,1]\times[0,1]\to \mathsf{E}$ を

$$F(s,t) := \begin{cases} H(2s,t) & (0\leq s\leq 1/2) \\ G(2s-1,t) & (1/2\leq s\leq 1) \end{cases}$$

によって定義すれば，F は連続で ρ から τ へのホモトピーになっている．

定義 3.14 X と E は前定義のものとするとき，E 内の任意の点 p を基点とするどんなループも E 内の定値のループ 0_p にホモトープならば E は**単連結** (simply connected) であるという．

直観的にいえば，E が単連結であるとは，E 内のどんなループも連続的に 1 点に変形できるということである．

位相空間 X の弧状連結な E に 1 点 p をとり，p を基点とするループの全体をホモトープの関係によって同値類に分けると，その数は p によらない．それが n であるとき E は n **重連結**であるという (図 3.7)．

例 3.20 ユークリッド空間 R^n は単連結である．

例 3.21 球面 $\mathrm{S}^n (n\geq 2)$ は単連結である．

例 3.22 円周 S^1 は単連結でない．

例 3.23 円環面 T^2 は単連結でない (図 3.8)．

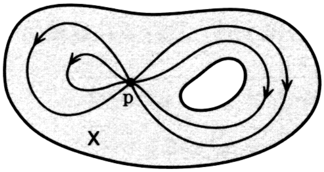


図 3.7 2 重連結

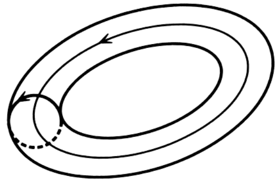


図 3.8 円環面．$\mathrm{T}^2\cong\mathrm{S}^1\times S^1$ (同相)

演習問題

3.1 開集合であって，かつ閉集合でもある集合はあるか?

3.2 開区間 (a,b) は R^1上では開集合だが，R^2で見ると開集合ではないという．このことを説明せよ．閉区間ではどうか?

3.3 $\mathsf{M}(n,\mathsf{R})$ の元は，その行列要素を座標とする R^{n^2} の点と同一視することができる．$\mathsf{M}(n,\mathsf{R})$ の元のうち逆をもつもの全体は R^{n^2} で開集合をなすことを示せ．

3.4 E, F を位相空間 X の部分集合とする．次の関係を証明せよ：

(i) $\mathsf{E} \subset \mathsf{F}$ ならば $\overline{\mathsf{E}} \subset \overline{\mathsf{F}}$, (ii) $\overline{\mathsf{E} \cup \mathsf{F}} = \overline{\mathsf{E}} \cup \overline{\mathsf{F}}$.

3.5 E を位相空間 X の部分集合とするとき，E の内点全体の集合を E の内部といって E^{i}と記す．次の命題を証明せよ：

(i) E^{i}は E に含まれる最大の開集合である

(ii) $(\mathsf{E}^{\mathrm{i}})^{\mathrm{c}} = \overline{\mathsf{E}^{\mathrm{c}}}$ (iii) $(\mathsf{E} \cap \mathsf{F})^{\mathrm{i}} = \mathsf{E}^{\mathrm{i}} \cap \mathsf{F}^{\mathrm{i}}$ (iv) $\mathsf{E}^{\mathrm{b}} = \overline{\mathsf{E}} - \mathsf{E}^{\mathrm{i}}$

3.6 E を R^nの空でない部分集合とし，$\boldsymbol{x}$ を R^nの点とする．$\boldsymbol{x}$ と E の距離を $d(\boldsymbol{x},\mathsf{E}) := \inf\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \mid \boldsymbol{y} \in \mathsf{E}\}$ と定義する．

(i) $\boldsymbol{x} \in \overline{\mathsf{E}} \Longleftrightarrow d(\boldsymbol{x},\mathsf{E}) = 0$ を示せ．

(ii) 関数 $\boldsymbol{x} \mapsto d(\boldsymbol{x},\mathsf{E})$ は R^nにおいて連続であることを示せ．

(iii) E, F を空でない閉集合で，互いに素とする．次の 3 条件をみたす R^n上の連続関数 f をつくれ：

(a) $0 \leqq f(\boldsymbol{x}) \leqq 1$, (b) E 上で $f(\boldsymbol{x}) = 0$, (c) F 上で $f(\boldsymbol{x}) = 1$.

3.7 R^nの空でない部分集合 E, F の距離を $d(\mathsf{E},\mathsf{F}) = \inf\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \mid \boldsymbol{x} \in \mathsf{E},\ \boldsymbol{y} \in \mathsf{F}\}$ と定義する．E および F が互いに素な閉集合のとき，どちらかがコンパクトなら $d(\mathsf{E},\mathsf{F}) > 0$ となることを示せ．

3.8 Hausdorff 空間 X の部分空間 S は，また Hausdorff 空間であることを示せ．(図 3.2 の G, H と S との交わりをとる．)

3.9 R^1において連結な集合は区間にかぎることを示せ．

3.10 E を位相空間 X の連結な集合とする．E から R^1への連続写像 f は，E 上で二つの相異なる値をとるなら，それらの間の任意の値をもとることを示せ．

3.11 R^2 の部分集合 $\mathsf{E} = \left\{\left(x, \sin\dfrac{1}{x}\right) \mid 0 < x \leqq 1\right\} \cup \{(0,y) \mid -1 \leqq y \leqq 1\}$ は連結ではあるが弧状連結ではないことを示せ．

第4章 連続群

連続群とは，位相構造をもち演算が連続な群をいう．回転群，ユニタリ群，Lorentz 群など，物理の強力な武器になる例が多い．素粒子の内部自由度と対称性もこの種の群で記述される．

§4.1 古典線形群

一般線形群 (例 1.3) の元で，あたえられた双 1 次形式または Hermite 形式を不変にするものの全体は部分群をなし，物理学など応用上で重要な役をつとめる．回転群は実ベクトルの Euclid 内積を，Lorentz 群は実ベクトルの Minkowski 内積を不変にする部分群である．

(a) 双 1 次形式と Hermite 形式

定義 4.1 K を実数体 R，あるいは複素数体 C とする． n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in$ K^n の関数で K の値をとる $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を次の表 4.1 に示す性質で定義し，C^n 上の

表 4.1 B 形式を定義する性質

	双 1 次形式	Hermite 形式
	$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathsf{K}^n$, $\alpha, \beta \in \mathsf{K}$	$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathsf{C}^n$, $\alpha, \beta \in \mathsf{C}$
$B(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{z}) =$	$\alpha B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \beta B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$	左に同じ
$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) =$	$B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (対称) $-B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (交代)	$\overline{B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$

Hermite 形式 (Hermitian form)，K^n上の対称な**双 1 次形式** (bilinear form) などとよぶ．その総称を B 形式としよう．□

この定義から，Hermite 形式に対しては

$$B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \text{実数}, \quad B(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \bar{\alpha}B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + \bar{\beta}B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

が成り立つことになる．どの形式でも $B(\boldsymbol{x},0) = B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ となる．逆は必ずしも真でないから，次の定義をする．

定義 4.2　定義 4.1 の B 形式で

$$\forall\boldsymbol{x} \in \mathsf{K}^n\,[\mathsf{C}^n] \text{ に対し } B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

が成り立つとき，B は**非退化** (nondegenerate) であるという[*1]．□

$\mathsf{K}^n\,[\mathsf{C}^n]$ の基底 $(\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n)$ に対して $B(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j)$ を成分とする n 次の正方行列を，その基底に関する B の表現行列という．明らかに，B が非退化であるための必要十分条件は，一つの基底に関する表現行列が正則なこと ($\det B \neq 0$) である．

本章で次の 2 定理は基本的である．

定理 4.1　B を K^n上の非退化な対称または交代双 1 次形式とすれば，これを不変にする行列の集合

$$\mathsf{G}(B) = \{T \in \mathsf{M}(n,\mathsf{K}) | B(T\boldsymbol{x},T\boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathsf{K}^n\}$$

は行列の積の意味で群をなす．ただし，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ は列ベクトルとする．C^n上の非退化な Hermite 形式についても同じ．

［証明］ $T\boldsymbol{x} = 0 \Longrightarrow B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0\ (\forall y \in \mathsf{K}^n) \Longrightarrow \boldsymbol{x} = 0$ だから T は正則で，逆をもつ．次に $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ などとおけば

$$B(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}') = B(T^{-1}\boldsymbol{x}',T^{-1}\boldsymbol{y}') \qquad (\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathsf{K}^n)$$

となるから $T^{-1} \in \mathsf{G}(B)$．そして，$S,T \in \mathsf{G}(B)$ なら

$$B(ST\boldsymbol{u},ST\boldsymbol{v}) = B(T\boldsymbol{u},T\boldsymbol{v}) = B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

となり $ST \in \mathsf{G}$．よって，$\mathsf{G}(B)$ は群をなす．Hermite 形式の場合の証明も同じ．∎

定理 4.2　B が表 4.1 の形式で非退化ならば，各空間上に適当に基底をとって $B(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j)$ を表 4.2 に示した標準形にすることができる．

---

*1　$\mathsf{K}^n\,[\mathsf{C}^n]$ は B に応じて K^n または C^nをとることを表わす．

表 4.2　B 形式の標準形

空間	形式	標準形 $B(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j)$	B を不変にする群
C^n	対称双 1 次	$\delta_{ij} \quad (i, j = 1, \cdots, n)$	$\mathrm{O}(n, \mathsf{C})$
R^n $(n = p + q)$	対称双 1 次	$1 \quad (i = j = 1, \cdots, p)$ $-1 \quad (i = j = p + 1, \cdots, n)$ $0 \quad (i \neq j)$	$\mathrm{O}(p, q)$
K^n $(n = 2m)$	交代双 1 次	$\delta_{i,m+i} - \delta_{i+m,i} \ (i = 1, \cdots, m)$	$\mathrm{Sp}(2m, \mathsf{K})$
C^n $(n = p + q)$	Hermite	$1 \quad (i = j = 1, \cdots, p)$ $-1 \quad (i = j = p + 1, \cdots, n)$ $0 \quad (i \neq j)$	$\mathrm{U}(p, q)$

この表の $n = p + q$ は 'n に対して負でない整数 p, q が存在して，基底によらない' と読む．B を標準形にする基底は，C^n 上の対称双 1 次形式の場合，正規直交基底という．

［証明］ (i) C^n 上の対称双 1 次形式．$\mathsf{V}_n = \mathsf{C}^n$ とおき，n に関する数学的帰納法による．$n = 1$ のときは自明．n のとき正しいとして，V_{n+1} 上の B を考えよう．これは仮定により非退化だから，任意の 0 でないベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathsf{C}^{n+1}$ に対して $B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') \neq 0$ とする $\boldsymbol{v}'$ が存在する．$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \lambda \boldsymbol{v}'$ とおけば，

$$B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + 2\lambda B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') + \lambda^2 B(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}')$$

となり，右辺を 1 にする $\lambda \in \mathsf{C}$ がとれるから，対応する $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u}_1$ とおけば

$$B(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1) = 1.$$

そこで，V_{n+1} において $\boldsymbol{u}_1$ に直交するベクトル全体の張る部分空間を U とすれば，これは C^n に一致し，B の定義域を V_n に制限した $B|_{\mathsf{V}_n}$ は明らかに非退化である．よって，帰納法の仮定により V_n には正規直交基底が存在する．それらは $\boldsymbol{u}_1$ に直交するから，これを併せて $\mathsf{V}_{n+1} = \mathsf{C}^{n+1}$ の正規直交基底が得られる．

(ii) R^n 上の対称双 1 次形式．R^n の一つの基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関し行列 $A =$

$\Big(B(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)\Big)$は実対称かつ正則だから 0 でない実数の固有値 $\{\alpha_k > 0,\ -\beta_l < 0\}$ $(k = 1, \cdots, p,\ l = p+1, \cdots, p+q = n)$ をもち，ある直交行列 $P = (p_{ij})$ により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & O \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_p & & & \\ & & & -\beta_{p+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ O & & & & & -\beta_{p+q} \end{pmatrix}$$

の形にできる．$\boldsymbol{u}_i = N_i^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} p_{ji} \boldsymbol{v}_j$ とし，

$$N_i = \begin{cases} \alpha_i & (i = 1, \cdots, p) \\ \beta_i & (i = p+1, \cdots, p+q = n) \end{cases}$$

とおけば $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ が斜交基底になる．p, q が基底によらないことは Sylvester の慣性則からわかる．

(iii) C^n 上の Hermite 形式．正則な行列はユニタリ行列で対角化され固有値は 0 でない実数であるから，上と同様に証明できる．

(iv) K^n 上の交代双 1 次形式．K^n の一つの基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関し $A = \Big(B(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)\Big)$は交代行列であるから $\det A = (-1)^n \det A$ となり，n は偶数でなければならない．$n = 2m$ とおき，m に関する帰納法を用いよう．$m = 1$ のとき，B が非退化なことから，任意の 0 でないベクトル $\boldsymbol{u}_1$ に対し $B(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 1$ とする $\boldsymbol{u}_2$ が存在するので，定理は正しい．

$m > 1$ のときも，まず上のような $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ をとり，これらに直交する $\mathsf{K}^{2(m+1)}$ の部分空間をとれば，これは K^{2m} に一致する．K^{2m} の任意の基底に $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を併せれば $\mathsf{K}^{2(m+1)}$ の基底になるが，これに関する B の行列は

$$A_{2(m+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{2m} \end{pmatrix}$$

の形になり，A_{2m} も非退化である．よって，帰納法の仮定から定理は $n = 2(m+1)$ に対しても正しい．∎

(b) B 形式を不変にする群

一般線形群の部分群を，それが不変にする双 1 次形式または Hermite 形式によって特徴づけることができる．

以下，B を標準形にする基底をとり，ベクトル $\boldsymbol{x}$ のそれに関する成分を $(x_1, \cdots, x_n)$ とする．定理 4.2 によれば，C^n 上の対称双 1 次形式は

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathsf{C}^n)$$

となるので，これを不変にする群は

$$\mathsf{G}(B) = \{T \in \mathsf{M}(n, \mathsf{C}) \mid T^{\mathrm{t}} T = I_n\}$$

であって，**複素直交群** $\mathrm{O}(n, \mathsf{C})$ にほかならない．I_n は n 次の単位行列である．同様にして，R^n 上の対称双 1 次形式を不変にする群は

$$\mathsf{G}(B) = \{T \in \mathsf{M}(p+q, \mathsf{R}) \mid T^{\mathrm{t}} I_{p,q} T = I_{p,q}\} \qquad I_{p,q} := \begin{pmatrix} I_p & O \\ O & -I_q \end{pmatrix}$$

である．これを慣性指数 (p, q) の**擬直交群** (pseudo-orthogonal group) といい，$\mathrm{O}(p, q)$ と記す．$q=0$ のとき $\mathrm{O}(n)$ と書いて直交群とよぶ．$\mathrm{O}(3, 1)$ は Lorentz 群である．

K^n 上の交代双 1 次形式は，基底ベクトルを適当に並べると

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_{m+1} + \cdots + x_m y_{2m} - x_{m+1} y_1 - \cdots - x_{2m} y_m \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathsf{C}^n)$$

となるので，これを不変にする群は

$$\mathsf{G}(B) = \{T \in \mathsf{M}(2m, \mathsf{K}) \mid T^{\mathrm{t}} J_{2m} T = J_{2m}\}, \quad J_{2m} = \begin{pmatrix} O & I_m \\ -I_m & O \end{pmatrix}$$

である．これを K 上の $2m$ 次の**斜交群** (symplectic group) といい，$\mathrm{Sp}(2m, \mathsf{K})$ と記す．

C^n 上の Hermite 形式は

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{x_1} y_1 + \cdots + \overline{x_p} y_p - \overline{x_{p+1}} y_{p+1} - \cdots - \overline{x_{p+q}} y_{p+q} \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathsf{C}^n)$$

と書ける $(p+q=n)$．これを不変にする群は

$$\mathsf{G}(B) = \{U,\ \mathsf{M}(p+q, \mathsf{C}) \mid U^{\dagger} I_{p,q} U = I_{p,q}\}$$

で，慣性指数 (p, q) の**擬ユニタリ群** (pseudo-unitary group) といい，$\mathrm{U}(p, q)$ と記す．$q=0$ のときがユニタリ群 $\mathrm{U}(n)$ である．

それぞれの群で，行列式が1の行列の全体は部分群をなす．それを群の名前に**特殊** (special) を冠してよび，記号にも S をかぶせる．たとえば

$$\mathrm{SU}(n) = \{U \in \mathsf{M}(n, \mathsf{C}) | U^\dagger I_n U = U_n,\ \det U = 1\}$$

は特殊ユニタリ群である．$\mathrm{SO}(n)$ は**回転群** (rotation group) にほかならない．

$\mathrm{U}(2m) \cap \mathrm{Sp}(2m, \mathsf{C})$ は群をなし，ユニタリ斜交群とよばれ $\mathrm{Sp}(2m)$ と記される．

一般線形群 $\mathrm{GL}(n, \mathsf{K})$, 特殊線形群 $\mathrm{SL}(n, \mathsf{K})$ に以上の群を加えて**古典線形群** (clasical linear group) と総称する (付録の表 A.1 を参照).

(c)　線形群の位相構造

行列の空間 $\mathsf{M}(n, \mathsf{K})$ に

$$(T, S) = \mathrm{tr}\ T^\dagger S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij}^* s_{ij} \quad \Big(T, S \in \mathsf{M}(n, \mathsf{K})\Big) \tag{4.1}$$

によって内積を導入すれば $\|T\| = (T,\ T)^{1/2}$ がノルムの性質をもつ．これを行列の Hilbert-Schmidt ノルムという．行列 $T = (t_{ij})$ に，その要素を座標$(t_{11}, \cdots, t_{1n}, t_{21}, \cdots, t_{2n}, t_{n1}, \cdots, t_{nn})$とする(複素) Euclid 空間 K^{n^2} の点を対応させれば，そこでのノルムに一致する．その写像 F は全単射かつ線形で，(4. 1)により

$$\|F(T)\| = \|T\|. \tag{4.2}$$

一般に，ノルム空間 V から W への全単射，線形な写像 f が存在してノルムを変えないとき V と W は互いに**等距離同形** (isometric) であるという．このとき一方が完備なら他方も完備であって，f は同相写像である．よって，行列の空間 $\mathsf{M}(n, \mathsf{K})$ は (複素)Euclid 空間 K^{n^2} と同じ位相構造をもつ．複素 Euclid 空間 C^m は実 Euclid 空間 R^{2m} と同相だから，結局 $\mathsf{M}(n, \mathsf{K})$ は R^N(K が R なら $N = n^2$, C なら $N = (2n)^2$) と同相である．

行列の列 (sequence) $T_k \in \mathsf{M}(n, \mathsf{K})$ の収束は，(複素)Euclid 空間の点列の収束と同様に

$$\lim_{k\to\infty} T_k = A \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \|T_k - A\| = 0$$

によって定義する．これは行列の各要素の収束と同じで，T_k, A の要素をそれぞれ $t_{ij}^{(k)}$, a_{ij} とすれば

$$\lim_{k\to\infty} T_k = A \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} t_{ij}^{(k)} = a_{ij}. \tag{4.3}$$

ここで

$$\|T\| = \|\bar{T}\| = \|T^{\mathrm{t}}\| = \|T^{\dagger}\| \tag{4.4}$$

および

$$\|TS\| \leqq \|T\| \cdot \|S\|, \quad \|T+S\| \leqq \|T\| + \|S\| \tag{4.5}$$

に注意しよう．これらから

定理 4.3 $\mathsf{M}(n,\mathsf{K})$ において $\lim_{k\to\infty} T_k = A$, $\lim_{k\to\infty} S_k = B$ が成り立ち，K において $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \alpha$ が成り立つとき

$$\lim_{k\to\infty} (T_k + S_k) = A + B,$$
$$\lim_{k\to\infty} T_k S_k = AB, \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k T_k = \alpha A$$

および

$$\lim_{k\to\infty} T_k^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}}, \quad \lim_{k\to\infty} T_k^{*} = A^{*}, \quad \lim_{k\to\infty} T_k^{\dagger} = A^{\dagger}$$

が成り立つ． □

一般線形群 $\mathrm{GL}(n,\mathsf{K})$ を空間 $\mathsf{M}(n,\mathsf{K})$ においてみると

定理 4.4 $\mathrm{GL}(n,\mathsf{R})$, $\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$ は，それぞれ $\mathsf{M}(n,\mathsf{R})$, $\mathsf{M}(n,\mathsf{C})$ において開集合である．

［証明］ $\det T$ は T の行列要素の多項式であるから，写像 $\det : \mathsf{M}(n,\mathsf{K}) \longrightarrow \mathsf{K}$ は連続である．そして，$\mathrm{GL}(n,\mathsf{K}) = \det^{-1}(\mathsf{K}-\{0\})$ であり，$\mathsf{K}-\{0\}$ は K において開集合なので，定理 3.12 により $\mathrm{GL}(n,\mathsf{K})$ は $\mathsf{M}(n,\mathsf{K})$ において開集合である． ∎

注意 $\mathrm{GL}(n,\mathsf{R})$ は $\mathsf{M}(n,\mathsf{C})$ においては開集合でない．例 3.8 を参照．

定理 4.5 付録の表 A.1 に掲げた古典線形群は，$\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$ を除き，すべて $\mathsf{M}(n,\mathsf{C})$ において閉集合である．ただし，$p+q=n$, $2m=n$ とする．

［証明］ $\mathrm{SL}(n,\mathsf{K}) = \det^{-1}(\{1\})$ だから $\mathrm{SL}(n,\mathsf{K})$ は定理 3.12 により $\mathsf{M}(n,\mathsf{K})$ において閉集合である．$\mathsf{M}(n,\mathsf{R})$ は $\mathsf{M}(n,\mathsf{C})$ において閉集合なので，定理 3.10 によ

り $\mathrm{SL}(n, \mathsf{R})$ は $\mathsf{M}(n, \mathsf{C})$ において閉集合である．写像 $f : \mathsf{M}(n, \mathsf{C}) \longrightarrow \mathsf{M}(n, \mathsf{C})$ を $f(T) = T^\dagger T$ によって定義すれば，これは定理 4.3 により連続である．そして，$\mathrm{O}(n, \mathsf{C}) = f^{-1}(\{I_n\})$ であり，$\{I_n\}$ は $\mathsf{M}(n, \mathsf{C})$ において閉集合なので $\mathrm{O}(n, \mathsf{C})$ は $\mathsf{M}(n, \mathsf{C})$ において閉集合である．$\mathrm{SO}(n, \mathsf{C})$ は，$\mathrm{O}(n, \mathsf{C}) \cap \mathrm{SL}(n, \mathsf{C})$ に等しいので定理 3.4 により $\mathsf{M}(n, \mathsf{C})$ において閉集合である．付録の表 A.1 の他の群についても同様． ∎

定理 4.6 $\mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n), \mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n), \mathrm{Sp}(2m)$ はすべてコンパクトである．

［証明］ まず，$\mathrm{U}(n)$ について証明する．$\mathsf{M}(n, \mathsf{C})$ は複素 Euclid 空間 C^{n^2} と等距離同相なので，定理 3.22 により $\mathrm{U}(n)$ が $\mathsf{M}(n, \mathsf{C})$ における有界閉集合であることを示せばよい．閉集合であることは前定理に示されている．有界なことは任意の $T \in \mathrm{U}(n)$ に対し

$$\|T\|^2 = \mathrm{tr}\ T^\dagger T = \mathrm{tr}\ I_n = n$$

となることから明らか．

次に，$\mathrm{Sp}(2m) \subset \mathrm{U}(2m)$ なので $\mathrm{Sp}(2m)$ は有界である．閉集合であることは定理 4.5 に示されている．

他の群に対する証明も同様である． ∎

上掲のもの以外の古典線形群 (付録の表 A.1) はコンパクトでない．しかし

定理 4.7 古典線形群は，すべて可算基底をもつ局所コンパクトな Hausdorff 空間をなす． □

Hausdorff 空間をなす群を Hausdorff 群という．

［証明］ 可算基底をもつ位相空間の部分空間は，また可算基底をもち，Hausdorff 空間の部分空間は，また Hausdorff 空間である (演習問題 3.8) ことに注意し，定理 3.24 を使う． ∎

(d) 群演算の連続性

定理 4.3 から，一般線形群の乗法，すなわち $\mathrm{GL}(n, \mathsf{K}) \times \mathrm{GL}(n, \mathsf{K})$ から $\mathrm{GL}(n, \mathsf{K})$ への写像 $(T, S) \mapsto TS$ は連続である．$T \mapsto T^{-1}$ は，T の (i, j) 要素の余因子を Δ_{ij} とすれば $(T^{-1})_{ij} = \Delta_{ji} / \det T$ であって，これは $\mathrm{GL}(n, \mathsf{K})$ から自身への連続写像である．よって一般線形群の群演算は連続である．したがってまた，その部分群である古典線形群の演算も連続である．

§4.2 位相群

一般線形群に対して得た前節の結果を公理にして出発する．

定義 4.3 集合 G が群であり，次の 2 条件がみたされれば，G を**位相群** (topological group) という．

TG_1：G × G から G への写像 $(x, y) \mapsto xy$ は連続である．

TG_2：G から G への写像 $x \mapsto x^{-1}$ は連続である．□

ここで，G × G の位相は直積位相とする．

例 4.1 一般線形群は位相群である．前節を参照．□

上記の 2 条件は，次の一つの条件と同値である：

TG：G × G から G への写像 $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ は連続である．

実際，TG_2によって G × G から G × G への写像 $(x, y) \mapsto (x, y^{-1})$ が連続であり，TG_1より G × G から G × G への写像 $(x, y^{-1}) \mapsto xy^{-1}$が連続となって TG が得られる．

逆に，TG が成り立てば $x = e$ とおいて TG_2が得られ，したがってまた写像 $(x, y) \mapsto (x, y^{-1}) \mapsto x(y^{-1})^{-1} = xy$ が連続となって TG_1も得られる．

近傍の概念を用いて，条件 TG を書き換えよう．TG の写像を f とすれば，それが (a, b) において連続であるとは，W を G における ab^{-1}の任意の近傍とするとき $f^{-1}(\mathrm{W})$ が G × G における (a, b) の近傍になることである．したがって，定理 3.13 から，a のある近傍 U と b のある近傍 V が存在して

$$\mathrm{U} \times \mathrm{V} \subset f^{-1}(\mathrm{W}) \quad \text{すなわち} \quad f(\mathrm{U} \times \mathrm{V}) \subset \mathrm{W}$$

が成り立つので

TG′：G の任意の 2 元 a, b に対して W を ab^{-1}の任意の近傍とすれば，a のある近傍 U と b のある近傍 V に対して $\mathrm{UV}^{-1} \subset \mathrm{W}$が成り立つ．

同相写像の定義 3.7 から容易に

定理 4.8 位相群から任意の元 a をとって固定し，写像 L_a, R_a, φ を

$$L_a(x) = ax, \quad R_a(x) = xa, \quad \varphi(x) = x^{-1}$$

によって定義すれば，これらは，いずれも G から G への同相写像である．□

L_aおよび R_aを，それぞれ a による**左移動** (left translation) および**右移動**と

いう．この定理は位相群が全体にわたって均質であることを意味している．その任意の元 a を任意の b に移す同相写像が $L_{ba^{-1}}$ のように存在するからである．したがって，位相群の局所的な性質は単位元 e の近傍で調べれば足りる．

一般の位相空間においては，任意の点の開近傍の全体はその点の基本近傍系をなすが，位相群においては閉近傍の全体もそうなる．

定理 4.9 位相群 G の任意の元 a の閉近傍全体は a の基本近傍系をなす．

［証明］ $a = e$ の場合を考えればよい．証明すべきことは，e の任意の近傍 W に含まれる閉近傍の存在である．$ee = e$ だから TG′により e の近傍 U, V で $\mathsf{UV} \subset \mathsf{W}$ をみたすものがある．$\mathsf{U}' = \mathsf{U} \cap \mathsf{V}$ とおけば U' は e の近傍で，$\overline{\mathsf{U}'} \subset \mathsf{W}$ が成り立ち，これが求める閉近傍である．実際，$x \in \overline{\mathsf{U}'}$ とすれば定理 4.8 により $L_x\Big(\varphi(U')\Big)$ は x の近傍である．ゆえに，定理 3.5 から $x\mathsf{U}'^{-1} \cap \mathsf{U}' \neq \emptyset$ が成り立つ．よって U' と $x\mathsf{U}'^{-1}$ に属する y が存在し，ある $z \in \mathsf{U}'$ に対して $y = xz^{-1}$ となる．したがって，$x = yz \in \mathsf{U}'\mathsf{U}' \subset \mathsf{W}$．ゆえに $\overline{\mathsf{U}'} \subset \mathsf{W}$． ∎

定理 4.10 位相群 G の任意の開集合 O と任意の部分集合 E に対し，OE と EO は共に開集合である．

［証明］ $x \in \mathsf{E}$ とすれば，定理 4.8 により $L_x(\mathsf{O}) = x\mathsf{O}$ は開集合であり，その合併 $\bigcup_{x \in \mathsf{E}} x\mathsf{O} = \mathsf{EO}$ も開集合である．OE についても同様に証明される． ∎

定理 4.11 位相群のコンパクト部分集合 E, F の積 EF はコンパクトである．

［証明］ 定理 3.21 により E×F はコンパクトであり，写像 $f(x, y) = xy\ (x, y \in \mathsf{G})$ は連続だから，定理 3.19 によって $\mathsf{EF} = f(\mathsf{E}, \mathsf{F})$ はコンパクトである． ∎

定理 4.12 $\mathcal{N}$ を位相群 G の単位元の任意の基本近傍系とする．G の任意の部分集合 E に対して

$$\overline{\mathsf{E}} = \bigcap_{\mathsf{U} \in \mathcal{N}} \mathsf{EU} = \bigcap_{\mathsf{U} \in \mathcal{N}} \mathsf{UE}.$$

［証明］ 定理 4.8 により $\{x\mathsf{U}^{-1} \mid \mathsf{U} \in \mathcal{N}\}$ は x の基本近傍系をなす．$\overline{\mathsf{E}}$ の定義から

$$x \in \overline{\mathsf{E}} \iff \forall \mathsf{U} \in \mathcal{N} \text{に対して } x\mathsf{U}^{-1} \cap \mathsf{E} \neq \emptyset$$

となり $x \in \bigcap_{\mathsf{U} \in \mathcal{N}} \mathsf{EU}$ がでて，定理の最初の等式が得られる．第 2 の等式も同様． ∎

定理 4.13 位相群 G の閉集合 F とコンパクト集合 K の積 FK, KF は閉集合で

ある．

［証明］ FK が閉集合であることを示そう．それには，$(\mathsf{FK})^c \subset (\overline{\mathsf{FK}})^c$をいえばよい．$x \notin \mathsf{FK}$ とする．このとき $\mathsf{F}^{-1}x \cap \mathsf{K} = \emptyset$ で，定理 4.8 により $\mathsf{F}^{-1} = \varphi(\mathsf{F})$ とその右移動 $\mathsf{F}^{-1}x$ は閉集合である．

$\mathcal{N}$ を単位元 e の基本近傍系とすれば，任意の $\mathsf{W} \in \mathcal{N}$ に対し $\mathsf{VV}' \subset \mathsf{W}$となる $\mathsf{V}, \mathsf{V}' \in \mathcal{N}$ が存在し，$\mathsf{U_W} \subset \mathsf{V} \cap \mathsf{V}'$なる $\mathsf{U_W} \in \mathcal{N}$ がとれる．そして $\mathsf{U_W U_W} \subset \mathsf{W}$ となるから，定理 4.12 より$\overline{\mathsf{F}^{-1}x\mathsf{U_W}} \subset \mathsf{F}^{-1}x\mathsf{U_W U_W} \subset \mathsf{F}^{-1}x\mathsf{W}$が得られ

$$\bigcap_{\mathsf{U} \in \mathcal{N}} \overline{\mathsf{F}^{-1}x\mathsf{U}} \subset \bigcap_{\mathsf{W} \in \mathcal{N}} \overline{\mathsf{F}^{-1}x\mathsf{U_W}} \subset \bigcap_{\mathsf{W} \in \mathcal{N}} \mathsf{F}^{-1}x\mathsf{W} = \overline{\mathsf{F}^{-1}x} = \mathsf{F}^{-1}x$$

となる．この最右辺は K との共通部分がないので

$$\bigcap_{\mathsf{U} \in \mathcal{N}} \overline{\mathsf{F}^{-1}x\mathsf{U}} \cap \mathsf{K} = \emptyset.$$

$\overline{\mathsf{F}^{-1}x\mathsf{U}} \cap \mathsf{K}$ はコンパクト集合 K における閉集合であるから，定理 3.17 により $\mathcal{N}$ から有限個の元 $\mathsf{U}_1, \cdots, \mathsf{U}_n$を選んで

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathsf{F}^{-1}x\mathsf{U}_i} \cap \mathsf{K} = \emptyset.$$

にすることができる．さらに $\mathsf{U}_0 \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathsf{U}_i$なる $\mathsf{U}_0 \in \mathcal{N}$ がとれるので

$$\mathsf{F}^{-1}x\mathsf{U}_0 \cap \mathsf{K} \subset \overline{\mathsf{F}^{-1}x\mathsf{U}_0} \cap \mathsf{K} = \emptyset$$

となり，$x\mathsf{U}_0 \cap \mathsf{FK} = \emptyset$を意味し，$x\mathsf{U}_0$は x の近傍であるから $x \notin \overline{\mathsf{FK}}$が示された． ∎

定理 4.14 位相群 G の部分群 H は，相対位相に関して位相群である．

［証明］ G の演算は連続だから，それを H に制限したものは相対位相に関して連続となる． ∎

例 4.2 例 4.1 により古典線形群 (付録の表 A.1) は，すべて位相群である． □

定理 4.15 位相群 G の部分群 H は開集合ならば，閉集合でもある．

［証明］ $a \in \overline{\mathsf{H}}$とすれば，$a\mathsf{H}$ は a の近傍であるから $a\mathsf{H} \cap \mathsf{H} \neq \emptyset$となり $a \in \mathsf{HH}^{-1} = \mathsf{H}$．これは$\overline{\mathsf{H}} \subset \mathsf{H}$ を意味する． ∎

(a) 準同形定理

H を位相群 G の部分群とし，左剰余類の全体 G/H に次のようにして位相を

入れる．すなわち，π を G から $\mathsf{G/H}$ への標準写像とし，$\mathsf{G/H}$ の部分集合 A が開集合であるとは $\pi^{-1}(\mathrm{A})$ が開集合であること，と定める．こうして定義された開集合の全体 $\mathcal{O}$ が開集合の公理系 O1.–O3. をみたすことは容易に確かめられる．この位相を G から $\mathsf{G/H}$ に導かれた**商位相** (quotient topology) という．

定理 3.12 により写像 π は連続である．開写像でもある．実際，$\pi(\mathsf{O}) = \mathsf{OH}$ は定理 4.10 により開集合である．

定理 4.16 H を位相群 G の部分群とする．左剰余類空間 $\mathsf{G/H}$ が Hausdorff 空間であるための必要十分条件は H が閉集合なることである．

［証明］ $\Longrightarrow$: Hausdorff 空間において有限集合は閉集合であるから (定理 3.5), $\{\mathsf{H}\}$ は $\mathsf{G/H}$ の閉集合である．G に戻して $\mathsf{H} = \pi^{-1}(\{\mathsf{H}\})$ は閉集合である．

$\Longleftarrow$: A および B を $\mathsf{G/H}$ の相異なる元とする．$a \in A$, $b \in B$ とすれば $a^{-1}b \notin \mathsf{H}$ だから，$a^{-1}b$ のある近傍 W があって $\mathsf{W} \cap \mathsf{H} = \emptyset$ となる．G は位相群なので a, b それぞれのある近傍 U, V をとれば $\mathsf{U}^{-1}\mathsf{V} \in \mathsf{W}$となり $\mathsf{U}^{-1}\mathsf{V} \cap \mathsf{H} = \emptyset$．したがって

$$\pi(\mathsf{U}) \cap \pi(\mathsf{V}) = \emptyset.$$

ところが π は開写像だったから $\pi(\mathsf{U}), \pi(\mathsf{V})$ はそれぞれ $\mathsf{G/H}$ における A, B の近傍である．つまり，交わらない近傍がとれた． ∎

H が G の正規部分群ならば $\mathsf{G/H}$ は群になる．剰余群 (定義 1.9) である．

定理 4.17 剰余群 $\mathsf{G/H}$ は商位相に関して位相群である．

［証明］ A, B を $\mathsf{G/H}$ の相異なる元とし，$a \in A, b \in B$とすれば $AB^{-1} = \pi(ab^{-1})$ となるから，AB^{-1}の任意の近傍 W に対して $\pi^{-1}(\mathsf{W})$ は G における ab^{-1}の近傍である．G は位相群なので a のある近傍 V と bのある近傍 V をとって $\mathsf{UV}^{-1} \subset \pi^{-1}(\mathsf{W})$ にできるから

$$\pi(\mathsf{U})\pi(\mathsf{V})^{-1} = \pi(\mathsf{UV}^{-1}) \subset \mathsf{W}$$

これは，$\pi(\mathsf{U}), \pi(\mathsf{V})$ がそれぞれ A, Bの近傍なので，$(\mathsf{G/H}) \times (\mathsf{G/H})$ から $\mathsf{G/H}$ への写像 $(X, Y) \mapsto XY^{-1}$が点 (A, B) において連続であることを意味している． ∎

定義 4.4 位相群 G から位相群 G'への写像 f は次の 2 条件をみたすとき G から G'への**準同形写像** (homomorphism) という：

(i) $f(xy) = f(x)f(y) \qquad (\forall x, y \in \mathsf{G})$

(ii) f は連続.

さらに，f が開写像なら**開準同形写像**という．もし，それに加えて全単射でもあれば**同形写像** (isomorphism) といい，そのような f が存在するとき G は G' に**同形** (isomorphic) であるといって $\mathsf{G} \cong \mathsf{G}'$ と記す．これは同値関係である．□

例 4.3 $\mathrm{O}(p,q,\mathsf{C}) = \{X \in \mathsf{M}(p+q,\mathsf{C}) \mid X^{\mathrm{t}} I_{p,q} X = I_{p,q}\}$ を定義すれば，この群は $\mathrm{O}(p+q,\mathsf{C})$ に同形である．また (元の行列式)$= 1$ の条件を加えて $\mathrm{SO}(p,q,\mathsf{C})$ とすれば，$\mathrm{SO}(p+q,\mathsf{C})$ に同形である．実際，行列 T を

$$T = (t_k \delta_{k,l}) \qquad t_k = \begin{cases} 1 & (k = 1, \cdots, p) \\ \mathrm{i} & (k = p+1, \cdots, p+q) \end{cases}$$

とすれば，$f(X) = TXT^{-1}$ は $\mathrm{O}(p,q,\mathsf{C})$ から $\mathrm{O}(p+q,\mathsf{C})$ への同形写像になる．$\mathrm{SO}(p,q,\mathsf{C})$ についても同じ．この変換は，特殊相対性理論の Minkowski 計量を形の上で Euclid 的にするために使われる．□

定理 4.18 (準同形定理) f を位相群 G から位相群 G' への開準同形写像とすれば

$$\mathsf{G}/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathsf{G}'.$$

［証明］ $\mathsf{G}/\mathrm{Ker}(f)$ の任意の元 X に対して

$$F(X) = f(x) \qquad (x \in X)$$

とおけば，右辺は X からの代表元 x の選び方によらずに定まり (定理 1.8 を参照)，写像 $F : \mathsf{G}/\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathsf{G}'$ が定義される．これは全単射で $F(XY) = F(X)F(Y)$ をみたす．

G から $\mathsf{G}/\mathrm{Ker}(f)$ への標準写像を π とすれば，これは開連続な全射で

$$F \circ \pi = f$$

の性質がある．これから，$\mathsf{G}/\mathrm{Ker}(f)$ における任意の開集合 U に対し

$$F(\mathsf{U}) = f\Big(\pi^{-1}(\mathsf{U})\Big)$$

が成り立ち，右辺は G の開集合であるから F は開写像である．次に，G' における任意の開集合を O' とすれば

$$F^{-1}(\mathsf{O}') = \pi\Big(f^{-1}(\mathsf{O}')\Big)$$

となり，右辺は G/Ker(f) における開集合であるから F は連続である．以上により F は同形写像である．　∎

一般に開写像の判定は難しい．ただし，後の定理 4.20 の系を見よ．その帰結として，この定理は古典線形群に適用できることになる．

定理 4.19　位相群 G の正規部分群 H に対し G/H から G への連続写像 s で $\pi \circ s = I_{\mathsf{G/H}}$ を満たすものがあれば，G は (G/H) × H に同相である．

［証明］　写像 $f : \mathsf{G} \longrightarrow (\mathsf{G/H}) \times \mathsf{H}$ および $g : (\mathsf{G/H}) \times \mathsf{H} \longrightarrow \mathsf{G}$ を

$$f(x) = \Big(\pi(x), [s(\pi(x))]^{-1}x\Big), \quad g(X, y) = s(X)y$$

によって定義すれば π および s が連続なので f も g も連続で，しかも

$$g \circ f = I_{\mathsf{G}}, \quad f \circ g = I_{(\mathsf{G/H}) \times \mathsf{H}}$$

を満たし，g が f の逆写像になっている．ゆえに f は同相写像である．　∎

例は，後に例 4.9 として与える．

(b)　位相変換群

§1.5 で導入した変換群の概念は，位相群にも適合させることができる．

定義 4.5　G を位相群，X を位相空間とする．G × X から X への連続写像 $(g, x) \mapsto y$ を $y = gx$ と書くとき，次の 2 条件が満たされるなら G を X に作用する**位相変換群** (topological transformation group) という．

(i)　$\forall a, b \in \mathsf{G},\ \forall x \in \mathsf{X}$　に対して　$(ab)x = a(bx)$

(ii)　$\forall x \in \mathsf{X}$　に対して　$ex = x$　□

§1.5 で定義した等方部分群，効果的 [推移的] に作用する，軌道，等質空間の概念は，位相変換群にそのまま移される．例 1.29, 1.30 についていえば：

例 4.4　GL(n, K) は $\mathsf{K}^{n-1} - \{0\}$ に推移的に作用する 位相変換群である．　□

例 4.5　O(n) および SO(n) は $n-1$ 次元球面に推移的に作用する．　□

m 次元複素球面を

$$\mathsf{S}_{\mathsf{c}}^{m} = \{z \in \mathsf{C}^{m+1} \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_{m+1}|^2 = 1\}$$

と定義する．明らかに $\mathsf{S}_{\mathsf{c}}^{m} = \mathsf{S}^{2m+1}$ である．そうすると

例 4.6　U(n) および SU(n) は $\mathsf{S}_{\mathsf{c}}^{n-1}$ に推移的に作用する．　□

以下，Hausdorff 空間をなす位相群を Hausdorff 群という．

定理4.20（開写像定理）　可算基底をもつ局所コンパクトな Hausdorff 群 G が局所コンパクトな Hausdorff 空間 X に推移的に作用するとき，X の任意の点 x_0 を固定し $\psi(g)=gx_0\,(g\in \mathrm{G})$ によって定義した写像 $\psi:\mathrm{G}\longrightarrow \mathrm{X}$ は開写像である．

［証明］ G の任意の開集合 O に対し $\psi(\mathrm{O})$ が開集合になることをいう．それには，任意の $p\in \mathrm{O}$ に対して $\psi(p)$ が $\psi(\mathrm{O})$ の内点になることを示せばよい．$p^{-1}\mathrm{O}$ は G の単位元 e の近傍であるから $\mathrm{UU}\subset p^{-1}\mathrm{O}$ を満たす e の近傍 U が存在する．したがって，定理 3.23 により e のコンパクトな近傍 V で U に含まれるものがとれて

$$p\mathrm{VV}\subset \mathrm{O} \tag{4.6}$$

が成り立つ．その際，$\mathrm{V}=\mathrm{V}^{-1}$を仮定してよい．そうでないときは $\mathrm{V}\cap\mathrm{V}^{-1}$をあらためて V とおけばよいからである．そうしても (4.6) は成り立つ．

さて，V の内部を V^{i}とすれば $\mathcal{F}=\{a\mathrm{V}^{\mathrm{i}}\mid a\in \mathrm{G}\}$ は G の開被覆である．実は，適当なたかだか可算個の $a_1,\cdots,a_n,\cdots$ をとって

$$\mathrm{G}=\bigcup_n a_n\mathrm{V}^{\mathrm{i}} \tag{4.7}$$

にできることを示そう．$\mathcal{B}$を G の可算基底とする．各 $\mathrm{O}\in\mathcal{B}$に対し $\mathrm{A_O}=\{a\in \mathrm{G}\mid \mathrm{O}\subset a\mathrm{V}^{\mathrm{i}}\}$ とおき，$\mathcal{B}'=\{\mathrm{O}\in\mathcal{B}\mid \mathrm{A_O}\neq\emptyset\}$ とすれば，これはたかだか可算個の元からなるので，その各 O ごとに $\mathrm{A_O}$から 1 点ずつとって $a_1,\cdots,a_n,\cdots$ としよう．G のどの元 b も，ある a に対して $a\mathrm{V}^{\mathrm{i}}$に属するが，$\mathcal{B}$は G の基底であるから，ある $\mathrm{O}\in\mathcal{B}$が存在して

$$b\in \mathrm{O}\subset a\mathrm{V}^{\mathrm{i}}$$

となる．この O に対し a は $\mathrm{A_O}$の他の元に替えても同じ式が成り立つので，$a_1,\cdots$ の一つとしてよい．よって (4.7) が成り立つ．

すると，群 G は X に推移的に作用し，ψ は G から X の上への写像だったから $\mathrm{X}=\bigcup_n\psi(a_n\mathrm{V}^{\mathrm{i}})$ となるが，$\mathrm{V}^{\mathrm{i}}\subset\mathrm{V}$だから

$$\mathrm{X}=\bigcup_n\psi(a_n\mathrm{V})$$

が得られる．V はコンパクトで ψ は連続だから $\psi(a_n\mathrm{V})$ もコンパクトであって，定理 3.18 により閉集合である．ゆえに，Baire の範疇定理 (定理 3.25) により内点をもつ．そこで，ある n に対して $\psi(\mathrm{V})=a_n^{-1}\psi(a_n\mathrm{V})$ も内点をもつことに

なる．これは，ある $v \in \mathsf{V}$に対して $\psi(v)$ が $\psi(\mathsf{V})$ の内点になることで，$\psi(p) = pv^{-1}\psi(v)$ は $pv^{-1}\psi(\mathsf{V})$ の内点になる．ところが

$$pv^{-1}\psi(\mathsf{V}) = \psi(pv^{-1}\mathsf{V}) \subset \psi(p\mathsf{VV}) \subset \psi(\mathsf{O})$$

であるから，$\psi(p)$ は $\psi(\mathsf{O})$ の内点である． ∎

系 4.1 G および G′を局所コンパクトな Hausdorff 群とし，G は可算基底をもつとすれば，G から G′の上への準同形写像 f は開写像となる．そして

$$\mathsf{G}/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathsf{G}'. \tag{4.8}$$

［証明］ f が準同形だから

$$gx = f(g)x \qquad (g \in \mathsf{G},\, x \in \mathsf{G}')$$

として G の G′への作用を定義することができる．これによって G は G′に推移的に作用する位相変換群となる．x_0を固定するとき，定理により $g \mapsto f(g)x_0$ は G から G′への開写像だから，x_0を G′の単位元にとることにより f も開写像であることがわかる．そこで (4.8) は定理 4.18 からでる． ∎

この定理が，定理 4.18 の下に予告した開写像の十分条件を与えている．付録の表 A.1 にリストした古典線形群は定理 4.7 により系の仮定をみたす．

例 4.7 K*を K の 0 でない元の全体がつくる乗法群とすれば

$$\mathrm{GL}(n, \mathsf{K})/\mathrm{SU}(n, \mathsf{K}) \cong \mathsf{K}^*.$$ □

例 4.8 $\mathrm{U}(n)/\mathrm{SU}(n) \cong \mathrm{U}(1) \quad (n = 1, 2, \cdots)$ □

例 4.9 $\mathrm{GL}(n, \mathsf{C}) \simeq \mathsf{C}^* \times \mathrm{SL}(n, \mathsf{C}), \quad \mathrm{U}(n) \simeq \mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(n).$

前者に対しては，例 4.7 を考慮し，写像 $s : \mathsf{C}^* \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathsf{C})$ として

$$s(z) = \begin{pmatrix} z & & & O \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathsf{C}^*)$$

をとればよい．後者の U(n) についても同様．ただし，$z \in \mathrm{U}(1)$ とする． □

次の定理は，位相群を等方部分群で割った剰余類の位相構造をきめる．

定理 4.21 可算基底をもつ局所コンパクトな Hausdorff 群 G が，局所コンパクトな Hausdorff 空間 X に推移的に作用しているとき，任意の $x_0 \in \mathsf{X}$ における等方部分群 H による剰余類 G/H は X に同相である．

［証明］ ψ を前定理の写像とし，G/H の元 A に対し，その代表元 a をとって

$$\varphi(A) = \psi(a)$$

により写像 $\varphi : \mathsf{G}/\mathsf{H} \longrightarrow \mathsf{X}$ を定義する．この式の右辺は代表元の選び方によらない．そして $\varphi \circ \pi = \psi$ が成り立つ．φ は全単射で，π も ψ も連続写像であることから，やはり連続となる (実は，いずれも開連続)．よって，G/H は X に同相である． ∎

例 4.10 例 4.5, 4.6 により

$$\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1) \simeq \mathsf{S}^{n-1}, \quad \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \simeq \mathsf{S}^{n-1}$$
$$\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-1) \simeq \mathsf{S}^{2n-1}, \quad \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1) \simeq \mathsf{S}^{2n-1}$$
$$\mathrm{Sp}(2n)/\mathrm{Sp}(2n-2) \simeq \mathsf{S}^{4n-1} \quad (n \geqq 2)$$ □

(c) 位相群の連結性

位相空間の連結性は §3.6 で定義した．連結な位相群は単位元の近傍から生成される．すなわち

定理 4.22 連結な位相群 G は，単位元の任意の近傍 U により $\mathsf{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{U}^n$ と書ける．

［証明］ $\mathsf{V} = \mathsf{U} \cap \mathsf{U}^{-1}$ とおく．これは単位元の近傍であって，$\mathsf{V} = \mathsf{V}^{-1}$ をみたす．$\mathsf{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{V}^n$ が示せれば十分である．この右辺を H とおく．

H は G の部分群である．これは，$a \in \mathsf{H}$ なら，ある j に対して $a \in \mathsf{V}^j$ となることから分かる．H は開集合である．実際，任意の $a \in \mathsf{H}$ に対し $a\mathsf{V}$ は a の近傍であり，$a\mathsf{V} \subset a\mathsf{H} \subset \mathsf{HH} \subset \mathsf{H}$ から H は a の近傍なので定理 3.3 により H は開集合である．したがって，定理 4.15 により閉集合でもある．よって，連結性の定義 3.11 から $\mathsf{H} = \mathsf{G}$ でなければならない． ∎

連結性の判定条件として

定理 4.23 G を位相群，H をその部分群とする．H および G/H が連結なら G も連結である．

［証明］ $\mathsf{O}_1, \mathsf{O}_2$ を $\mathsf{G} = \mathsf{O}_1 \cup \mathsf{O}_2$ かつ $\mathsf{O}_1 \cap \mathsf{O}_2 = \emptyset$ なる任意の開集合とするとき，一方が空集合となることを示せばよい．

G から G/H への標準写像を π とすれば $\pi(\mathsf{O}_1) \cup \pi(\mathsf{O}_2) = \mathsf{G}/\mathsf{H}$ となる．π は開写像なので $\pi(\mathsf{O}_1)$ も $\pi(\mathsf{O}_2)$ も開集合であるから，$\pi(\mathsf{O}_1) \cap \pi(\mathsf{O}_2) = \emptyset$ を示せば，G/H が連結なことより一方は空集合となり，$\mathsf{O}_1, \mathsf{O}_2$ の一方が空集合となって証

明が終わる．

$\pi(\mathsf{O}_1)\cap\pi(\mathsf{O}_2)=\emptyset$をいうため，左辺が $\mathrm{A}\in\mathsf{G}/\mathsf{H}$ を含むとしたら

$$\mathrm{A}=a_1\mathsf{H}=a_2\mathsf{H}\quad(a_i\in\mathsf{O}_i,\ i=1,2)$$

と表わされ

$$a_1\mathsf{H}\subset\mathsf{O}_1\cup\mathsf{O}_2,\quad a_1\mathsf{H}\cap\mathsf{O}_1\cap\mathsf{O}_2=\emptyset$$

が成り立つ．ところが H は連結なので $a_1\mathsf{H}$ も連結だが，$a_1\mathsf{H}\cap\mathsf{O}_1\neq\emptyset$ だから $a_1\mathsf{H}\cap\mathsf{O}_2=\emptyset$ でなければならない．ゆえに $a_1\mathsf{H}\subset\mathsf{O}_2^c=\mathsf{O}_1$．同様に $a_2\mathsf{H}\subset\mathsf{O}_2$．しかし，$a_1\mathsf{H}=a_2\mathsf{H}$ なのだから，これは $\mathsf{O}_1\cap\mathsf{O}_2=\emptyset$に矛盾する．よって，$\pi(\mathsf{O}_1)\cap\pi(\mathsf{O}_2)=\emptyset$． ∎

個々の**線形群の連結性**を調べよう．$\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$ の $a\in\mathsf{C}^n-\{0\}$ における等方部分群を H とすると

$$\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})/\mathsf{H}\simeq\mathsf{C}^n-\{0\}$$

となり，しかも H は $\mathrm{GL}(n-1,\mathsf{C})\times\mathsf{C}^{n-1}$に同相である (演習問題 4.5)．これから $\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$ の連結なことが数学的帰納法によって示される．実際，$n=1$ のときは自明．ある $n\geqq 2$ のとき $\mathrm{GL}(n-1,\mathsf{C})$ は連結とすれば，C^{n-1}は連結なので H が連結となり，$\mathsf{C}^n-\{0\}$ は連結なので定理 4.23 により $\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$ も連結である．群 G の，単位元を含む連結成分を G_0 と記す．

同様にして次の定理を得る (演習問題 4.1, 4.2 も参照)．ただし，例外とした群が連結でないことは，すぐ後に確かめる．

定理 4.24 付録の表 A.1 の古典線形群は，$\mathrm{GL}(n,\mathsf{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{O}(n,\mathsf{C})$, $\mathrm{O}(p,q)$, $\mathrm{SO}(p,q)$ を除きすべて連結である． □

連結でない群では，単位元を含む連結成分が重要である．定義からはじめよう．

定義 4.6 位相空間 X の 1 点を a とする．a を含むすべての連結集合の合併を X の a を含む**連結成分** (connected component) という． □

これは a を含む最大の連結集合である．連結成分は，その閉包も定理 3.26 により連結なので，連結成分の最大性から自身が閉集合となる．X の二つの連結成分 $\mathsf{C}_1,\mathsf{C}_2$は，1 点を共有すれば $\mathsf{C}_1\cup\mathsf{C}_2$も連結成分となるので，再び最大性から $\mathsf{C}_1=\mathsf{C}_1\cup\mathsf{C}_2=\mathsf{C}_2$となる．すなわち，任意の二つの連結成分は一致するか，互いに素である．したがって，任意の位相空間は連結成分の直和に分割される．

定理 4.25 位相群 G の，単位元を含む連結成分を C とすれば

(i) C は G の閉正規部分群である.

(ii) G のどの連結成分も $a\mathsf{C} = \mathsf{C}a\ (a \in \mathsf{G})$ の形に書ける.

[証明] (i) 定理 4.8 の φ は同相写像だから C^{-1} は連結であり，単位元を含むので $\mathsf{C}^{-1} \subset \mathsf{C}$. したがって，$a \in \mathsf{C}$ なら $a^{-1} \in \mathsf{C}$. 次に，任意の $a \in \mathsf{C}$ による左移動も定理 4.8 により同相写像だから $a^{-1}\mathsf{C}$ も連結で，単位元を含むゆえ $a^{-1}\mathsf{C} \subset \mathsf{C}$. したがって $\mathsf{CC} \subset \mathsf{C}$. よって C は部分群である. 同様にして $a\mathsf{C}a^{-1} \subset \mathsf{C}$ も得られるから，C は正規部分群である.

(ii) G の任意の連結成分を C' とする. $a \in \mathsf{C}'$ をとれば $a^{-1}\mathsf{C}'$ は単位元を含む連結集合となり $a^{-1}\mathsf{C}' \subset \mathsf{C}$. したがって，$\mathsf{C}' \subset a\mathsf{C}$. 他方，$a\mathsf{C}$ は a を含む連結集合だから $a\mathsf{C} \subset \mathsf{C}'$. ゆえに，$\mathsf{C}' = a\mathsf{C}$. ∎

例 4.11 $\mathrm{GL}(n, \mathsf{C})$ の場合と同様にして

$$\mathrm{GL}^+(n, \mathsf{R}) = \{X \in \mathsf{M}(n, \mathsf{R}) \mid \det X > 0\}$$

の連結なことが証明される. 連結成分は，もう一つあって

$$A_0 \cdot \mathrm{GL}^+(n, \mathsf{R}) \quad ただし \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ O & & & -1 \end{pmatrix}$$

であり，これら二つに限る. □

例 4.12 $\mathrm{O}(n)$ の，単位元を含む連結成分は $\mathrm{SO}(n)$ である. $A_0 \cdot \mathrm{SO}(n)$ も連結成分で

$$\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \cup A_0 \cdot \mathrm{SO}(n). \qquad □$$

例 4.13 $\mathrm{O}(p, q)$ の連結成分. $p, q \geqq 1$ とする. $p \geqq q \geqq 1$ として一般性を失わない. 双 1 次形式 B を表 4.2 の標準形にする基底をとり，$\boldsymbol{x} = (x_i)$, $\boldsymbol{y} = (y_i)$ とすれば

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} I_{p,q} \boldsymbol{y}$$

となる. これを用いれば，$A \in \mathsf{M}(p+q, \mathsf{R})$ が $A \in \mathrm{O}(p, q)$ となる条件 $A^{\mathrm{t}} I_{p,q} A = I_{p,q}$ は，A の第 i 列の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ として

$$B(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij} \cdot \begin{cases} 1 & (i = 1, \cdots, p) \\ -1 & (i = p+1, \cdots, p+q) \end{cases}$$

と書けるから

$$S(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix}, \quad T(A)=\begin{vmatrix} a_{p+1,p+1} & \cdots & a_{p+q,p+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p+q,p+1} & \cdots & a_{p+q,p+q} \end{vmatrix}$$

とおけば，$S(A)^2 \geqq 1$, $T(A)^2 \geqq 1$ が得られる．そこで $S(A)$, $T(A)$ がそれぞれ $\geqq 1$ か $\leqq -1$ かに従って $\mathrm{O}(p,q)$ は四つの連結成分 C_σ^τ (σ, τ は S, T の符号) に分かれる． □

特に，Lorentz 群 ($p=3$, $q=1$) の場合，$T=a_{44}$である．C_+^+を**固有** (proper) Lorentz 群とよび，$\mathrm{C}_+^+ \cup \mathrm{C}_-^+$ は時間の向きを変えないので**順時的** (orthochronous) Lorentz 群とよぶ．

§4.3 SU(2) と SO(3)

標記の群は物理学でも重要である．それらのパラメタ表示と相互関係を調べる．

(a) パラメタ表示

SU(2) の元をパラメタ表示するには，この群が 3 次元球面と同相であることを使う．実際

$$U=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2) \tag{4.9}$$

とおけば，

$$\begin{array}{ll} \text{ユニタリ性から} & : \ \delta=\bar{\alpha},\ \gamma=-\bar{\beta} \\ \det U=1 \text{ を合わせて} & : \ |\alpha|^2+|\beta|^2=1 \end{array}$$

となるので，$\{(x_1,\cdots,x_4)\,|\,x_1^2+\cdots+x_4^2=1\} \in \mathrm{S}^3$に対し

$$U=f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{pmatrix} \mathrm{i}x_3+x_4 & \mathrm{i}x_1+x_2 \\ \mathrm{i}x_1-x_2 & -\mathrm{i}x_3+x_4 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

とおいて写像 $S^3 \longrightarrow SU(2)$ を定義すれば，f は全単射で連続である．逆写像も連続だから，S^3 は SU(2) と同相である．

S^3 の点は，何通りにもパラメタ表示できる．まず $(0 \leqq \xi, \eta \leqq \pi, 0 \leqq \zeta \leqq 2\pi)$

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin\xi\sin\eta\sin\zeta, \quad x_2 = \sin\xi\sin\eta\cos\zeta, \\ x_3 &= \sin\xi\cos\eta, \quad x_4 = \cos\xi. \end{aligned} \tag{4.11}$$

このとき (4.10) は

$$g = \begin{pmatrix} \cos\xi + \mathrm{i}\sin\xi\cos\eta & \sin\xi\sin\eta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta} \\ -\sin\xi\sin\eta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta} & \cos\xi - \mathrm{i}\sin\xi\cos\eta \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

となる．このパラメタの特徴は，$\mathrm{tr}\, g$ が ξ にしかよらないことである．

あるいは $(0 \leqq t \leqq 1, 0 \leqq \varphi, \psi \leqq 2\pi)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{1-t}\,\sin\psi, \quad x_2 = \sqrt{1-t}\,\cos\psi, \\ x_3 &= \sqrt{t}\,\sin\varphi, \quad x_4 = \sqrt{t}\,\cos\varphi. \end{aligned} \tag{4.13}$$

変数変換して $(0 \leqq \theta \leqq \pi, 0 \leqq \varphi_1 \leqq 2\pi, 0 \leqq \varphi_2 \leqq 4\pi)$*2

$$t = \cos^2\frac{\theta}{2}, \quad \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad \psi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \frac{\pi}{2} \tag{4.14}$$

とすれば

$$U = U_3(\varphi_1)U_1(\theta)U_3(\varphi_2) \tag{4.15}$$

と書ける．ただし

$$U_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} \end{pmatrix}, \quad U_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \mathrm{i}\sin(\theta/2) \\ \mathrm{i}\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

であって，(4.13) からすでに明らかであるが (4.15) の U は

$$U = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)/2}\cos(\theta/2) & \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)/2}\sin(\theta/2) \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)/2}\sin(\theta/2) & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)/2}\cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

SO(3) の任意の元 R は，座標系を回転させて空間に固定した点の座標の変換

---

*2　$0 \leqq \psi \leqq 4\pi$, $0 \leqq \phi \leqq 2\pi$ としてもよい．

を見る見方 (受動的解釈) では，点 P の座標 $\boldsymbol{x}$ (縦ベクトル) が $R\boldsymbol{x}$ に移るとして

$$R = R_3(\psi)R_1(\theta)R_3(\varphi) \quad (0 \leqq \psi \leqq 2\pi,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi) \tag{4.18}$$

と書ける．(ψ, θ, φ) を Euler の角という．ここに

$$R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

三つの角度の意味は次のとおり：x, y, z 座標軸を，まず z 軸のまわりに角 ϕ だけ回して ξ, η, z 軸とし，次に ξ 軸のまわりに角 θ だけ回して ξ, η', z' 軸とし，最後に z' 軸のまわりに角 ψ だけ回して x', y', z' 軸とする．P の座標 $\boldsymbol{x}$ は各段階で $R_3(\phi), R_1(\theta), R_3(\psi)$ により順次に変換され，結局 (4.18) の変換を受けて $\boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x}$ となる．すなわち

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \sin\varphi\cos\psi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(b) 相互関係

$$\mathsf{V} = \{X \in \mathsf{M}(2, \mathsf{C}) \mid X + X^\dagger = 0,\ \mathrm{tr}\, X = 0\} \tag{4.20}$$

は実線形空間をなす．その元の一般形は

$$X = f(x_1, x_2, x_3, 0) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}x_3 & \mathrm{i}x_1 + x_2 \\ \mathrm{i}x_1 - x_2 & -\mathrm{i}x_3 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

である．V に (4.1) による内積を入れると

$$\frac{1}{2}\|X\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \det X \tag{4.22}$$

となることに注意しておこう．

さて，SU(2) の各元 g に対し，X に作用する演算子 $\mathrm{Ad}(g)$ を

$$\mathrm{Ad}(g) \cdot X = gXg^{-1} \qquad (X \in \mathsf{V}) \tag{4.23}$$

によって定義しよう．明らかに

$$\mathrm{Ad}(e)X = X, \quad \mathrm{Ad}(h)\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Ad}(hg) \qquad \Big(g, h \in \mathrm{SU}(2)\Big). \tag{4.24}$$

$\mathrm{Ad}(g)$ は V に線形変換をひきおこすが，それは (4.21) で見れば R^3 の線形変換でもあり，変換 (4.23) が det を変えないことと (4.22) から R^3 の直交変換になっている．$\mathrm{Ad}(g)$ でその変換行列をも表わすことにすれば $\det\Big(\mathrm{Ad}(g)\Big) = \pm 1$ である．具体的には，V に基底

$$S_1' = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2' = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3' = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

を入れると

$$X = x_1 S_1' + x_2 S_2' + x_3 S_3' \tag{4.26}$$

となる．$\mathrm{Ad}(g)$ は，いまや X の座標 (x_1, x_2, x_3) の変換行列である．

写像 Ad: $g \in \mathrm{SU}(2) \mapsto \mathrm{Ad}(g)$ は行列のノルム (4.1) に関して連続である．他方，SU(2) は連結で，その単位元において $\det \mathrm{Ad}(e) = 1$ だから $\det \mathrm{Ad}(g) = 1$ が結論される．したがって，$\mathrm{Ad}(g)$ は SO(3) の元とみなせるのである．

(4.25) の三つの行列を 3 次元ベクトルの成分とみなせば，量子力学でいうスピン演算子 $\hat{\boldsymbol{S}}$ の $\mathrm{i}/\hbar$ 倍になっている．$\hbar$ は (Planck 定数)/2π である．

定理 4.26 SU(2) の元 g に対して (4.23) で定義される V の線形変換 $\mathrm{Ad}(g)$ を，V の基底 (4.25) によって表現すれば，表現行列は SO(3) の元となる．これは SU(2) から SO(3) の上への準同形写像であって $\mathrm{Ker(Ad)} = \{I, -I\}$ である．したがって

$$\mathrm{SU}(2)/\{I, -I\} \cong \mathrm{SO}(3). \tag{4.27}$$

［証明］ (i) 写像 Ad が全射なこと，および (ii) Ker(Ad) が上記のとおりであることを示せばよい．すると，(4.27) は定理 4.20 の系からでる．

(i) (4.16) を利用する．簡単な計算により

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}\Big(U_3(\varphi)\Big)S_1' &= S_1' \cos\varphi - S_2' \sin\varphi, \\ \mathrm{Ad}\Big(U_3(\varphi)\Big)S_2' &= S_1' \sin\varphi + S_2' \cos\varphi, \\ \mathrm{Ad}\Big(U_3(\varphi)\Big)S_3' &= S_3' \end{aligned} \tag{4.28}$$

が得られるので，基底 (4.25) を用いて行列表示すれば

$$\mathrm{Ad}\Big(U_3(\varphi)\Big) = R_3(\varphi) \tag{4.29}$$

となる．同様にして，

$$\mathrm{Ad}\Big(U_1(\theta)\Big) = R_1(\theta) \tag{4.30}$$

も得られるから，(4.16) により Ad は全射である．

(ii) Ker(Ad) を求めるために，$g \in \mathrm{Ker(Ad)}$ を (4.9) の形に書けば

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ad}(g)S_1' = S_1' \quad \text{より} \quad \alpha = \bar{\alpha},\ \beta = -\bar{\beta}, \\ &\mathrm{Ad}(g)S_2' = S_3' \quad \text{より} \quad \beta = \bar{\beta} \end{aligned}$$

がでて $\alpha = \pm 1,\ \beta = 0$ でなければならない．これは明らかに十分でもある．∎

演習問題

4.1　例 4.12 によれば，O(n) は二つの連結成分からなる．$n = 2, 3$ の場合に，各連結成分の幾何学的意味を明らかにせよ．

4.2　Lorentz 群の四つの連結成分のそれぞれの典型的な変換行列を書け．

4.3　(4.17) の $U \in \mathrm{SU}(2)$ を用いて

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i}x_3' & \mathrm{i}x_1' + x_2' \\ \mathrm{i}x_1' - x_2' & -\mathrm{i}x_3' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \mathrm{i}x_3 & \mathrm{i}x_1 + x_2 \\ \mathrm{i}x_1 - x_2 & -\mathrm{i}x_3 \end{pmatrix} U^{-1}$$

を計算し，この変換 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \boldsymbol{x}' = (x_1', x_2', x_3')$ が

$$(\theta, \varphi_1, \varphi_2) = (\theta, \phi, \psi) \quad \text{および} \quad (\theta, \phi, \psi + 2\pi)$$

のとき (4.18) の $R \in \mathrm{SO}(3)$ による $\boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x}$ に一致することを確かめよ．これは (4.27) を直接に証明している．

4.4　次の同形関係を証明せよ：

(i)　$\mathrm{SU}(1,1) \cong \mathrm{SL}(2, \mathsf{R})$,

(ii)　$\mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{Sp}(2n, \mathsf{R}) \cong \mathrm{U}(n)$.

4.5　証明せよ：

(i) $\mathrm{O}(n), \mathrm{O}(n,\mathsf{C}), \mathrm{O}(p,q)$ $(p+q=n, p,q \geqq 1)$ の中心はいずれも $\{I_n, -I_n\}$ である．

(ii) $\mathrm{SL}(n,\mathsf{R})$ の中心は，n が奇数なら $\{I_n\}$ であり，n が偶数なら $\{I_n, -I_n\}$ である．

(iii) $\mathrm{SL}(n,\mathsf{C}), \mathrm{SU}(n)$ の中心は，いずれも Z_n に同形である．

4.6 $\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$ は $\mathsf{X}=\mathsf{C}^n-\{0\}$ に推移的に作用する位相変換群であることを確かめ，X の点 e_n における等方部分群 H は $\mathrm{GL}(n-1,\mathsf{C})\times\mathsf{C}^{n-1}$ と同相であることを示せ．

4.7 G を位相空間 X に作用する位相変換群とする．x_0 を X の固定点とし $f(a)=a\mathrm{x}_0$ $(a\in\mathsf{G})$ によって写像 $f:\mathsf{G}\longrightarrow\mathsf{X}$ を定義する．もし，X から G への連続写像 s で $f\circ s=I_{\mathsf{X}}$ をみたすものが存在すれば，G は $\mathsf{X}\times\mathsf{H}$ に同相であることを示せ．ここに H は x_0 における G の等方部分群である．

4.8 $\mathrm{SO}(3)$ の元 R をとり $\tilde{R}=\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．また，Lorentz boost とよばれる

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \qquad (t\in\mathsf{R})$$

を定義する．固有 Lorentz 群 $\mathrm{O}(3,1)_0$ の任意の元 A は，ある $R,S\in\mathrm{SO}(3)$ とある B によって $A=\tilde{R}B\tilde{S}$ と表わされることを示せ．

注意 $B_3:=B$ とおく．この代わりに

$$B_1:=\begin{pmatrix} \cosh t & 0 & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & 0 & \cosh t \end{pmatrix}, \quad B_2:=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix}$$

を用いても，同じことが成り立つ．

4.9 すべての 2 次の Hermite 行列の集合 V は 4 次元線形空間をなす．V の基底を

$$J_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とし，V の元 X を

$$X = \begin{pmatrix} x_1 + x_4 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 + x_4 \end{pmatrix}$$

と書く．$\det(X) = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2)$ であるから

$$\sigma(X, Y) := -\frac{1}{2}\left\{\det(X+Y) - \det(X) - \det(Y)\right\}$$

とおけば，σ は $\mathbf{V}$ における非退化双一次形式で

$$\sigma(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$$

となる．以下，$(\mathbf{V}, \sigma)$ を Minkowski 空間とみなす．

$\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ の任意の元 A に対して $\rho(A)$ を

$$\rho(A) X = AXA^{\dagger} \qquad (\forall X \in \mathbf{V})$$

で定義する．$\rho(A)$ は $\mathbf{V}$ における線形変換である．

(1)　$\sigma(\rho(A)X, \rho(A)Y) = \sigma(X, Y)$ を示せ．以後，$\rho(A)$ を $\mathrm{O}(3, 1)$ の元とみなす．

(2)　$\rho : A \to \rho(A)$ は $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ から $\mathrm{O}(3, 1)_0$ の中への準同形写像であることを示せ．

(3)　$\mathrm{Ker}(\rho)$ に属する A はユニタリ行列であることを示し，次に $XA = AX$ が成り立つことを示せ．続いて，X として J_1 および J_2 をとり $\mathrm{Ker}(\rho)$ を決定せよ．

(4)　$\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ の三つの元

$$U(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad V(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix}, \quad W(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha/2} \end{pmatrix}$$

$$(\alpha \in \mathbf{R})$$

に対応する線形変換 $\rho(U(\alpha)), \rho(V(\alpha)), \rho(W(\alpha))$ の，基底 (J_1, J_2, J_3, J_4) に関する行列表示を計算することにより $\mathrm{Im}(\rho)$ を決定せよ．

(5)　以上のことから $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})/\{\pm I\} \cong \mathrm{O}(3, 1)_0$ を示せ[*3]．

[*3] これは固有 Lorentz 群のスピノル表現を与える．

第5章

線形Lie群とLie代数

応用上で重要な群の多くは $\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$ の閉部分群をなす線形Lie群である．その表現をすべて求める問題はLie代数の表現をすべて求める問題に帰着される．

§5.1 行列の指数関数

行列 $A\in\mathsf{M}(n,\mathsf{C})$ の指数関数を，無限級数

$$\exp A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k \qquad (A^0=I) \tag{5.1}$$

によって定義する．$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\|A^k\|\leqq \mathrm{e}^{\|A\|}$ であるから(§4.1(c)参照)，絶対収束する複素級数が収束するのと同じ理由で(5.1)も収束して一つの行列を定める．

定理 5.1 $A,B\in\mathsf{M}(n,\mathsf{C})$ とする．

(i) A,B が可換なら $\exp A\cdot\exp B=\exp[A+B]$

(ii) $\exp A\in\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$ であって $(\exp A)^{-1}=\exp[-A]$

(iii) $(\exp A)^{\mathrm{t}}=\exp[A^{\mathrm{t}}],\quad (\exp A)^{\dagger}=\exp[A^{\dagger}]$.

(iv) $T\in\mathrm{GL}(n,\mathsf{K})$ に対して $T(\exp A)T^{-1}=\exp[TAT^{-1}]$.

(v) $\det[\exp A]=\mathrm{e}^{\mathrm{tr}\,A}$.

[証明]

(v) は $T\in\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$ による (iv) の変換で A が三角行列にできることを利用する． ∎

$\{A \in \mathsf{M}(n, \mathsf{C}) \mid \|A - I\| < 1\}$ 上で対数関数を

$$\log A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(A - I)^k \tag{5.2}$$

と定義すれば，これは次の意味で exp と逆関数の関係にある．

定理 5.2

(i) $\exp A$ および $\log A$ は連続関数である．

(ii) $\|A\| < \log 2$ ならば $\log[\exp A] = A$

(iii) $\|A - I\| < 1$ ならば $\exp[\log A] = A$

［証明］ 演習問題 5.1 参照． ∎

実軸の区間 $\mathbf{I}$ 上の行列値関数 $\mathbf{I} \longrightarrow \mathsf{M}(n, \mathsf{K})$ の微積分は，行列のノルム (4.1) に関して定義され

定理 5.3 $F(t), G(t)$ $(t \in \mathbf{I})$ が微分可能な行列値関数ならば

(i) FG も $\mathbf{I}$ 上で微分可能であり

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(FG) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}G + F\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}.$$

(ii) さらに $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{I}$ で $\det F \neq 0$ なら，F^{-1} は $\mathbf{J}$ 上で微分可能であり

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F^{-1} = -F^{-1}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}F^{-1}$$

(iii) $F(t)$ $(t \in \mathbf{I})$ が連続な行列値関数ならば

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_a^s F(t)\mathrm{d}t = F(s) \qquad \Big([a, s] \subset \mathbf{I}\Big).$$

□

一般に，行列を係数とする $t \in \mathsf{C}$ のベキ級数は収束円の内部で解析的であり，項別微分できる．特に，定数行列 A に対し $\exp[tA]$ は t の解析関数であって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp[tA] = A\exp[tA] = \exp[tA]A \tag{5.3}$$

となる．そこで，$\rho(t) = \exp[tA]$ とおけば，ρ は R から $\mathrm{GL}(n, \mathsf{K})$ への連続写像で

$$\rho(s + t) = \rho(s)\rho(t) \tag{5.4}$$

が成り立つ．一般に，加法群としての R (例 1.1) から $\mathrm{GL}(n, \mathsf{K})$ への準同形写像を $\mathrm{GL}(n, \mathsf{K})$ の **1 径数部分群** (one-parameter subgroup) という．上の写像

$\rho : t \mapsto \exp[tA]$ は $\mathrm{GL}(n, \mathsf{K})$ の 1 径数部分群である．逆に

定理 5.4 $\mathrm{GL}(n, \mathsf{K})$ のどんな 1 径数部分群 ρ も微分可能であって，適当な行列 $A \in \mathsf{M}(n, \mathsf{K})$ により

$$\rho(t) = \exp[tA]$$

の形に表わされる．しかも，この A は ρ によって一意に定まる．

［証明］ (5.4) において $s = t = 0$ とすれば $\rho(0)^2 = \rho(0)$ となり，$\rho(0)^{-1}$ をかけて $\rho(0) = I$. $\rho(t)$ の微分可能性を示すため，再び (5.4) により

$$\int_a^b \rho(s+t)\mathrm{d}t - \int_a^b \rho(t)\mathrm{d}t = \Big[\rho(s) - I\Big] \int_a^b \rho(t)\mathrm{d}t$$

を導く．左辺の第 1 項は $\displaystyle\int_{a+s}^{b+s} \rho(t)\mathrm{d}t$ と書けるから

$$\frac{\rho(s) - I}{s} = \left(\frac{1}{s}\int_b^{b+s} \rho(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{s}\int_a^{a+s} \rho(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b \rho(t)\mathrm{d}t\right)^{-1}$$

と変形し，$s \to 0$ とすれば，定理 5.3の (iii) により

$$\lim_{s\to 0} \frac{\rho(s) - I}{s} = [\rho(b) - \rho(a)]\left(\int_a^b \rho(t)\mathrm{d}t\right)^{-1}$$

となり，$\rho(s)$ の原点における微分可能性が知れる．この右辺を A とおけば $\rho'(0) = A$. この原点における微分可能性は (5.4) により任意の t におよぶ：

$$\lim_{s\to 0} \frac{\rho(t+s) - \rho(t)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{\rho(s) - I}{s}\rho(t) = \rho(t) \lim_{s\to 0} \frac{\rho(s) - I}{s} \quad .$$

こうして

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(t) = A\rho(t) = \rho(t)A. \tag{5.5}$$

ところが $\exp[tA]$ も $\rho(t)$ と同じ微分方程式をみたし，$t = 0$ で同じ初期条件をみたすから，両者は完全に一致する． ∎

§5.2 古典線形群の Lie 代数

定義 5.1 GL(n, C) の閉部分群を**線形 Lie 群**という. □

閉部分群とは，その元の収束する列の極限がまたその中に含まれるものをいう. GL(n, C) 自身も，GL(n, R) も，またその部分群も含めて，付録 A.1 の表に掲げた古典線形群はすべて線形 Lie 群である. 定理 4.5 を参照.

定義 5.2 G を線形 Lie 群とする. すべての実数 t に対して

$$\exp[tX] \in \mathsf{G} \tag{5.6}$$

を成り立たせる行列 $X \in \mathsf{M}(n, \mathsf{C})$ の全体を G の **Lie 代数** (Lie algebra) という.

□

このような X があったとすれば，それは

$$X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp[tX]\Big|_{t=0} \quad \text{または} \quad \exp[tX] = I + tX + O(t^2) \quad (t \to 0) \tag{5.7}$$

によって求められる. ここに，O は Landau の記号である. $F(t)/t^p$ が $t = 0$ の近傍で有界なことを $F(t) = O(t^p)$ $(t \to 0)$ と書くのである.

Lie 代数の構造を見る準備として

定理 5.5

$$\exp[tX]\exp[tY] = \exp\left[t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)\right] \tag{5.8}$$

$$\exp[tX]\exp[tY]\exp[-tX]\exp[-tY] = \exp\left\{t^2[X,Y] + O(t^3)\right\} \tag{5.9}$$

ここに

$$[X,Y] := XY - YX \tag{5.10}$$

は X と Y の**交換子** (commutator) と呼ばれる. □

この定理から，ただちに

定理 5.6 $\nu \to \infty$ において

$$\left\{\exp\left[\frac{X}{\nu}\right]\exp\left[\frac{Y}{\nu}\right]\right\}^{\nu} = \exp[X+Y] + O\left(\frac{1}{\nu}\right), \tag{5.11}$$

$$\left\{\exp\left[\frac{X}{\nu}\right]\exp\left[\frac{Y}{\nu}\right]\exp\left[-\frac{X}{\nu}\right]\exp\left[-\frac{Y}{\nu}\right]\right\}^{\nu^2}$$

$$= \exp\left\{[X,Y] + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}. \tag{5.12}$$

□

(5.11) を Trotter の公式という．これらの定理から

定理 5.7 線形 Lie 群 G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は次の性質をもつ：

(i) $a \in \mathsf{R},\ X \in \mathfrak{g} \quad \Longrightarrow \quad aX \in \mathfrak{g}$

(ii) $X, Y \in \mathfrak{g} \quad \Longrightarrow \quad X + Y \in \mathfrak{g}$

(iii) $X, Y \in \mathfrak{g} \quad \Longrightarrow \quad [X,Y] \in \mathfrak{g}$.

［証明］ (i) は Lie 代数の定義 5.2 から明らか．

(ii) は，同じく定義から $\exp[tX/\nu], \exp[tY/\nu] \in$ G だが，G は群なので，これらの積 (5.11) がまた G に属し，G は閉なので $\nu \to \infty$ の極限も G に属する．

(iii) も同様． ∎

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は，定理 5.7 の (i), (ii) により実線形空間をなし，(iii) により算法 $X, Y \mapsto [X,Y]$ に関して閉じている．この算法は，交換子積の定義から **Lie 条件**と呼ばれる次の特質をもつ：

L1. ベキ零性：$[X,X] = 0$

L2. 双線形性：$[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$,

$$[X, aY + bZ] = a[X,Y] + b[X,Z] \qquad (a, b \in \mathsf{R})$$

L3. Jacobi の恒等式：$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.

以上を一般化して，抽象 Lie 代数 (abstract Lie algebra) を定義しよう．

定義 5.3 K 上の線形空間 $\mathfrak{g}$ は，Lie 条件に従う算法 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ をもつとき **Lie 代数**という．K が C のとき複素 Lie 代数，R のとき実 Lie 代数と呼ぶ．$\mathfrak{g}$ の線形空間としての次元を $\mathfrak{g}$ の**次元**という． □

$[X,Y]$ を **Lie 積** (Lie product) という．交換子ともいうが，(5.10) で定義されている必要はない．ただ Lie 条件 L1.–L3. を満たすことのみを要求する．条件 L1., L2. から

$$0 = [X+Y, X+Y] = [X,Y] + [Y,X]$$

がでるので，この積は反対称である：

$$[X,Y] = -[Y,X]. \tag{5.13}$$

線形 Lie 群 G の Lie 代数は，親 G の名前をドイツ文字の小文字にして表わす．

例 5.1 定理 5.1 の (ii) により: $\mathfrak{gl}(n,\mathsf{K}) = \mathsf{M}(n,\mathsf{K})$. □

例 5.2 定理 5.1 の (v) により: $\mathfrak{sl}(n,\mathsf{K}) = \{X \in \mathsf{M}(n,\mathsf{K}) \mid \mathrm{tr}\, X = 0\}$. □

他の例は付録 A.2 に表として示す.

定義 5.4 K 上の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底を $(E_1, \cdots, E_n)$ とするとき

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{n} {c_{ij}}^k E_k \tag{5.14}$$

で与えられる n^3個の ${c_{ij}}^k \in \mathsf{K}$ $(i, j, k = 1, \cdots, n)$ を, その基底に関する $\mathfrak{g}$ の**構造定数** (structure constant) という. □

構造定数は, すべてが独立ではなく, 次の関係がある:

$${c_{ji}}^k = -{c_{ij}}^k \quad (i, j, k = 1, \cdots, n), \tag{5.15}$$

$$\sum_{h=1}^{n} \left({c_{ij}}^h {c_{hk}}^l + {c_{jk}}^h {c_{hi}}^l + {c_{ki}}^h {c_{hj}}^l \right) = 0 \tag{5.16}$$

$$(i, j, k, l = 1, \cdots, n).$$

後者は Jacobi の恒等式による. これら 2 式を満たす n^3個の ${c_{ij}}^k \in \mathsf{K}$ が与えられたとき, K 上の n 次元線形空間に交換子積を定義して Lie 代数とし, その構造定数が $\{{c_{ij}}^k\}$ となるようにすることができる.

例 5.3 (4.25) の三つの行列 S_i $(i = 1, 2, 3)$ を基底とする係数体 K の線形空間は Lie 代数をなす. その構造定数は ${c_{ij}}^k = -\varepsilon_{ijk}$である.

$$[S'_i, S'_j] = -\varepsilon_{ijk} S'_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3)^{*1} \tag{5.17}$$

ここに, ε_{ijk}は i, j, k が 1, 2, 3 の偶置換なら 1, 奇置換なら-1, それ以外では 0 とする. (5.6) に戻れば (4.16) の $U_1, U_3 \in \mathrm{SU}(2)$ につながる:

$$\exp[S'_1\theta] = U_1(\theta), \quad \exp[S'_3\varphi] = U_3(\varphi),$$
$$\exp[S'_2\chi] = \begin{pmatrix} \cos\chi & \sin\chi \\ -\sin\chi & \cos\chi \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

□

---

*1 各項の中で二度くりかえす添字については 1, 2, 3 にわたって和をとる. この規約は和の範囲を改めれば (5.16) にも適用できる.

§5.3 群の局所構造と Lie 代数

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が与えられると，ある線形 Lie 群が，その局所構造までは定まる．たとえば，定理 5.2 により

例 5.4

$$\mathsf{U} = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathsf{C}) \mid \|X\| < \log 2\}, \quad \mathsf{V} = \exp \mathsf{U}$$

とおけば，U は $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{C})$ における零元の開近傍で，V は $\mathrm{GL}(n, \mathsf{C})$ における単位元の開近傍になる．exp を U に制限した $\exp|_{\mathsf{U}}$ は U から V への同相写像である．

□

一般に，次の定理が成り立つ (証明は [17] にゆずる)：

定理 5.8 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の零元の開近傍を U とすれば，$\exp|_{\mathsf{U}}$ は U からある線形 Lie 群 G の単位元の近傍への同相写像となる．

この G を $\mathfrak{g}$ から生成される Lie 群という．定理 4.8 により G は均質だから

定理 5.9 l 次元の線形 Lie 代数から生成される線形 Lie 群の各元は R^l のある開集合と同相な近傍をもつ． □

そこで線形 Lie 群は局所 Euclid 的であるという．では，大局的にはどうか？

定理 5.10 線形 Lie 群 G の単位元を含む連結成分 G_0 はまた Lie 群で，G と G_0 の Lie 代数は一致する．

［証明］ 定理 4.25 により G_0 は G の閉部分群であるから，線形 Lie 群である．G と G_0 の Lie 代数をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0$ とすれば，$\mathsf{G} \supset \mathsf{G}_0$ より $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_0$ である．いま，任意の実数 t を固定し $f(s) = \exp[stX]\,(X \in \mathfrak{g})$ として定義した R から G への写像 f は連続である．そして，$f(0) \in \mathsf{G}_0$ であり，閉区間 $[0,1]$ は連結だから $f(1) = \exp[tX] \in \mathsf{G}_0$ である．t は任意だったから $X \in \mathfrak{g}_0$ が知れる． ∎

そこで，定理 5.8 と定理 4.22 から

定理 5.11 連結 Lie 群 G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とすれば，任意の $h \in \mathsf{G}$ は，$\mathfrak{g}$ の適当な有限個の元 $X_1, \cdots, X_m$ により

$$h = \exp X_1 \cdots \exp X_m$$

と表わされる．したがって，二つの連結 Lie 群は，Lie 代数が一致すれば一致する． □

こうして，Lie 代数は連結線形 Lie 群を一意に定める．

例 5.5 (4.19) に与えた SO(3) の元から

$$
\begin{aligned}
L_3' &:= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} R_3(\phi)\bigg|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
L_1' &:= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} R_1(\theta)\bigg|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.19}
$$

となるが，

$$
[L_3', L_1'] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (:= -L_2') \tag{5.20}
$$

で，L_1', L_3'だけでは交換子積が閉じない．(5.20) を $-L_2'$として加えてはじめて閉じる：

$$
[L_1', L_2'] = -L_3', \quad [L_2', L_3'] = -L_1', \quad [L_3', L_1'] = -L_2' \tag{5.21}
$$

$\{L_1', L_2', L_3'\}$ が O(3) の Lie 代数 $\mathfrak{o}(3)$ を張る[*2]．${L_2'}^2 = -I$ であるから

$$
\exp[L_2'\chi] = \begin{pmatrix} \cos\chi & 0 & -\sin\chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\chi & 0 & \cos\chi \end{pmatrix} \tag{5.22}
$$

となり，位置座標を縦ベクトルで表わすとき，これは例 1.8 に説明した意味で y 軸まわりに角 χ だけ座標軸を回す (受動的) 回転になっている．(L_1', L_2', L_3') は，量子力学でいう $l = 1$ の角運動量の行列の $\mathrm{i}/\hbar$ 倍である． □

二つの Lie 代数が一致しないときにも，(準) 同形が考えられる．

定義 5.5 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$を K 上の Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}'$への線形写像 ρ が

交換子積の保存： $\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] \qquad (X,\ Y \in \mathfrak{g})$

---

*2 $[L_3', L_1']$ を L_2'とせず負号をつけて$-L_2'$としたのは，次の例 5.6 に示す (S_1', S_2', S_3') との対応を成り立たせるためである．

を満たすとき，ρ を $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}'$ への**準同形写像**といい，さらに ρ が全単射なら**同形写像**という．そして，同形写像が存在するとき $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}'$ と同形であるといって $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$ と記す． □

例 5.6 (4.25) の $\{S_1', S_2', S_3'\}$ は $\mathfrak{su}(2)$ の基底であって，(5.21) と同じ形の交換子積をもつから

$$\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{o}(3) \tag{5.23}$$

であり，$\rho(S_i) = L_i'$ $(i = 1, 2, 3)$ に従う実線形写像 $\rho : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{o}(3)$ は同形写像である．(しかし，SU(2) と O(3) は同形ではない．局所同形であるにすぎない．定理 4.26，演習問題 4.3 を参照.) □

§5.4 随伴表現

定理 5.12 線形 Lie 群 G, G' の Lie 代数を，それぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ とする．G から G' への準同形 f に対し

$$f\Big(\exp[tX]\Big) = \exp\Big[t\Big(\rho(X)\Big)\Big] \qquad (X \in \mathfrak{g},\ t \in \mathsf{R})$$

を満足する $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}'$ への準同形写像 ρ が存在して一意である． □

ρ を f の**微分** (differential) といい，$\mathrm{d}f$ と書く．その名のとおり

$$\mathrm{d}f(X) = \rho(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\Big(\exp[tX]\Big)\bigg|_{t=0} \tag{5.24}$$

［証明］ $X \in \mathfrak{g}$ を任意に固定するとき，写像 $t \mapsto f(\exp[tX])$ は G' の 1 径数部分群であるから，定理 5.4 により

$$f(\exp[tX]) = \exp[tX'] \qquad (\forall t \in \mathsf{R}) \tag{5.25}$$

を満たす $\mathfrak{g}'$ の元 X' が存在する．これは X により一意に定まるので，$X' = \rho(X)$ により写像 $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ が定義できる．ρ が準同形であることを示そう．

(5.25) から $\rho(aX) = a\rho(X)$ $(a \in \mathsf{R})$．また，$X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して f の準同形性から

$$f\left(\left\{\exp\left[\frac{tX}{\nu}\right]\exp\left[\frac{tY}{\nu}\right]\right\}^{\nu}\right) = \left\{f\left(\exp\left[\frac{tX}{\nu}\right]\exp\left[\frac{tX}{\nu}\right]\right)\right\}^{\nu}$$

となるので，(5.25) を参照して $\nu \to \infty$ とすれば，定理 5.6 と f の連続性により

$$f\Big(\exp[t(X+Y)]\Big) = \exp\Big[t\Big\{\rho(X)+\rho(Y)\Big\}\Big]$$

を得る．ρの定義から左辺は $\exp[t\rho(X+Y)]$ に等しい．こうしてρの線形性が証明された．ρが交換子積を保存することも定理 5.6 を用いて同様に証明される． ∎

線形 Lie 群 G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とし，$\mathfrak{g}$ における正則な実線形変換の全体がつくる群を GL($\mathfrak{g}$) とする．$\mathfrak{g}$ が n 次元なら GL($\mathfrak{g}$) は GL(n, R) に同形である．

G の任意の元 h に対して

$$\mathrm{Ad}(h)\cdot X = hXh^{-1} \qquad (\forall X\in\mathfrak{g}) \tag{5.26}$$

により $\mathfrak{g}$ における線形変換 Ad(h) を定義する．明らかに

$$\mathrm{Ad}(h_1h_2) = \mathrm{Ad}(h_1)\mathrm{Ad}(h_2), \quad \mathrm{Ad}(e) = I_{\mathfrak{g}}, \quad \lim_{h\to e}\mathrm{Ad}(h) = I_{\mathfrak{g}}$$

が成り立つ．ただし，e は G の単位元，$I_{\mathfrak{g}}$は $\mathfrak{g}$ の恒等変換である．よって

定義 5.6 Ad: $h\mapsto \mathrm{Ad}(h)$ は準同形である．これを G の**随伴表現** (adjoint representation) という． □

Ad の微分は (5.24) から

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Ad}(\exp[tX])Y\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp[tX]Y\exp[-tX]\bigg|_{t=0} = XY-YX$$

となる．これを d(Ad)=ad と書く．すなわち

$$\mathrm{ad}(X)Y = XY-YX. \tag{5.27}$$

逆に，準同形写像$\rho:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}'$が与えられたとき，d$f=\rho$となるような準同形写像 $f:\mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{G}'$は，G が単連結なら存在することが知られている．ただし，G が**単連結** (simply connected) とは，G が弧状連結で G 内のどの閉曲線も 1 点に収縮できることをいう．付録 A.1 の表に示した古典線形群のうち SL(n, C), SU(n), Sp($2n$) は単連結である．

例 5.7 (4.23) の Ad は，SU(2) の随伴表現なのであった．例 5.3 から

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}\Big(U_1(\theta)\Big)X &= \exp[S_1'\theta]X\exp[-S_1'\theta],\\ \mathrm{Ad}\Big(U_3(\varphi)\Big)X &= \exp[S_3'\varphi]X\exp[-S_3'\varphi]\end{aligned} \tag{5.28}$$

が得られ，これからも SU(2) に対する (5.27) が確かめられる． □

演習問題

$A, B \in \mathsf{M}(n, \mathsf{K})$ とする．

5.1 次のことを証明せよ．

(i) $\|A\|, \|B\| \leqq a$ なら $\|A^n - B^n\| \leqq na^{n-1}\|A - B\|$ となる．
($A^n - B^n = A(A^{n-1} - B^{n-1}) + (A - B)B^{n-1}$ に注意して数学的帰納法を使う．)

(ii) $\|A\|, \|B\| \leqq a$ なら $\|\exp A - \exp B\| \leqq \mathrm{e}^a\|A - B\|$.

(iii) $\|A - I\|, \|B - I\| \leqq b,\ 0 < b < 1$ なら $\|\log A - \log B\| \leqq \dfrac{1}{1-b}\|A - B\|$

(iv) 定理 5.2 を証明せよ．

5.2 次式を証明せよ：

(i) $\exp[tA]\exp[tB] = \exp\left[t(A+B) + \dfrac{t^2}{2}[A, B] + O(t^3)\right] \qquad (t \to 0).$

(ii) $\exp[tA]\exp[tB]\exp[-tA]\exp[-tB] = \exp\left\{t^2[A, B] + O(t^3)\right\} \qquad (t \to 0).$

5.3 $\exp A = \mathrm{e}^A$ と書く．次式を証明せよ：

(i) $\mathrm{e}^A B \mathrm{e}^{-A} = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(A)}B = B + \dfrac{1}{1!}[A, B] + \dfrac{1}{2!}[A, [A, B]] + \cdots$

(ii) $\mathrm{e}^{t(A+B)} = \mathrm{e}^{tA}\left\{1 + \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-sA}B\mathrm{e}^{s(A+B)}\mathrm{d}s\right\}$

(iii) $F(t)$ を微分可能な行列値関数とするとき

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{F(t)} = \mathrm{e}^{F(t)}\varphi\Big(-\mathrm{ad}\,F(t)\Big)F'(t)$$

ここに φ は

$$\varphi(z) := \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z} = 1 + \frac{1}{2!}z + \frac{1}{3!}z^2 + \cdots$$

で与えられる解析関数である．

5.4 A および B が $[A, B]$ と可換ならば

$$\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \exp\left\{A + B + \frac{1}{2}[A, B]\right\}$$

となることを示せ．

5.5 $\mathrm{ML}(n, \mathsf{K})$ において原点の十分に小さい近傍に属する A, B に対して次の Campbell–Baker–Hausdorff の公式が成り立つ．これを証明せよ．

$$\log(\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B) = A + \int_0^t \psi(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(A)}\mathrm{e}^{t\mathrm{ad}(B)})\ B\mathrm{d}t.$$

ここに ψ は

$$\psi(z) := \frac{z\log z}{z-1} = 1+\frac{1}{2}(z-1)-\frac{1}{2\cdot 3}(z-1)^2+\frac{1}{3\cdot 4}(z-1)^3-\cdots \quad (|z-1|<1)$$

で与えられる解析関数である．

5.6 前問の公式は，A, B が小さいとして4次の項までとれば

$$\log(e^A e^B) = (A+B)+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}([A,[A,B]]-[B,[A,B]])-\frac{1}{24}[A,[B,[A,B]]]+\cdots$$

となることを示せ．$[A,B]$ が A とも B とも可換なとき，この公式はどうなるか？

5.7 行列 A のベキ級数 $f(A) = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots$ が収束するための必要十分条件は，A の固有値がすべて $f(z)$ の収束円の内部にあることである．ただし，固有値が最大 d 重に縮退しているなら $f^{(d-1)}$ の収束を条件に加える．これを証明せよ．

5.8 $\mathfrak{sl}(2, \mathrm{C})$ の任意の元 X に対して次式を証明せよ：

$$\exp X = I_2\cosh\tau + X\frac{\sinh\tau}{\tau} \qquad (\tau := \sqrt{-\det X})$$

5.9 3次元 Euclid 空間 R^3 がベクトルの外積を交換子積として Lie 代数をなすことを確かめよ．次に，$\mathfrak{so}(3)$ から R^3 への同相写像 φ で，任意の $h \in \mathrm{SO}(3), X \in \mathfrak{so}(3)$ に対して $\varphi(hXh^{-1}) = h\varphi(X)$ を満たすものが存在することを示せ．

5.10 Lie 代数 $\mathfrak{o}(4)$ の基底は次のようにとることができる：

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) $\{A_1, A_2, A_3\}$ および $\{B_1, B_2, B_3\}$ はそれぞれ $\mathfrak{o}(3)$ の交換関係をみたし，相互には交換することを確かめよ．

(ii) これが $\mathfrak{o}(4) \cong \mathfrak{o}(3) \oplus \mathfrak{o}(3)$ を意味することを説明せよ．このことから群について何が言えるか．

5.11 自由度 f をもつ質点系の一般化座標 $(q_1, \cdots, q_f)$ と，それに共役な一般化運動量 $(p_1, \cdots, p_f)$ との関数 A, B の Poisson 括弧は

$$\{A, B\} := \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial B}{\partial q_k} \frac{\partial A}{\partial p_k} \right)$$

で定義される．これを A, B の交換子積 $[A, B]$ に採用したとき

(i) Lie 条件が満たされることを確かめよ．

(ii) 系のハミルトニアンを $H = H(q_1, \cdots, q_f, p_1, \cdots, p_f)$ とすれば運動 $q_k = q_k(t)$, $p_k = p_k(t)$ は Hamilton の運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t) = -[H, X(t)] \qquad (X = q_k, p_k,\ k = 1, \cdots, f)$$

に従う．その解が $X(t) = \mathrm{e}^{-t\mathrm{ad}(H)} X(0)$ で与えられることを確かめよ．

(iii) ハミルトニアンが次式で与えられる系について，それぞれの運動を定めよ：

(a) $H = \dfrac{1}{2m} p^2 + \kappa q$, (b) $H = \dfrac{1}{2m} p^2 + \dfrac{\kappa}{2} q^2$ (m, κ は正の定数).

第6章

連続群の表現

群 G の表現とは，群の元の関数 ρ で準同形性 $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$ $(x, y \in \mathsf{G})$ をもつものである．これは連続群でも有限群でも変わらない．その解析に，有限群の場合には群の元全体にわたる和が役立った．たとえば，定理 2.1 の証明を見よ．その和を連続群の場合に拡張することから始めよう．

§6.1 不変積分

有限群の場合，群 G の元 x についての和は，任意の $a \in \mathsf{G}$ をとって $ax = y$ についての和としてもよかった．すなわち

$$\sum_{x \in \mathsf{G}} f(ax) = \sum_{a^{-1}y \in \mathsf{G}} f(y) = \sum_{y \in \mathsf{G}} f(y) \tag{6.1}$$

としてよかったのである．この性質が大いにものをいった．この和に相当するものは，連続群では積分になるだろう．(6.1) のような性質の積分がほしい．

G を局所コンパクトな Hausdorff 群とする．G 上で定義された複素数値連続関数 f について，集合 $\{x \in \mathsf{G} \mid f(x) \neq 0\}$ の閉包を f の台といい，$\operatorname{supp} f$ で表わす．a を G の任意の固定元とし，関数 $x \mapsto f(ax)$ を f の左平行移動といって ${}_af$ と記す．関数 $x \mapsto f(xa)$ は右平行移動 f_a である．ここで

$$({}_af)_b(x) = ({}_af)(xb) = f(axb) = {}_a(f_b)(x) \quad \Big(:= ({}_af_b)(x)\Big).$$

に注意しよう．平行移動の名は，それをすると台が平行移動するところからき

ている：

$$\mathrm{supp}({}_af) = a^{-1}(\mathrm{supp}\, f), \quad \mathrm{supp}(f_a) = (\mathrm{supp}\, f)a^{-1}. \tag{6.2}$$

G 上の，台がコンパクトな複素数値連続関数の全体を $\mathsf{C}_0(\mathsf{G})$ としよう．これは，関数の和およびスカラー倍によって複素線形空間をなす．C_0 の中で特に G 上いたるところで $h(x) \geqq 0$ である関数 h の全体を $\mathsf{C}_0^+(\mathsf{G})$ とする．

定義 6.1　G を局所コンパクトな Hausdorff 群とする．$\mathsf{C}_0(\mathsf{G})$ 上で定義された複素数値汎関数[*1] I は，次の 3 条件をみたすとき G の**左不変積分** (left-invariant integral) という：

(i)　線形性　$I[\alpha f + \beta g] = \alpha I[f] + \beta I[g] \quad \big(\alpha, \beta \in \mathsf{C},\ f, g \in \mathsf{C}_0(\mathsf{G})\big)$

(ii)　正定値　$I[h] \geqq 0 \quad (h \in \mathsf{C}_0^+(\mathsf{G})$; 等号は $h = 0$ のときのみ)

(iii)　左不変　$I[{}_af] = I[f] \quad (a \in \mathsf{G},\ f \in \mathsf{G}_0)$

もし，(iii) で ${}_af$ の代わりに f_a をおいた右不変性が成り立つなら**右不変積分** (right-invariant integral) という．□

次の 2 定理が基本的である．証明は略し，後の例で見ていただく．

定理 6.1 (Haar の定理)　局所コンパクトな Hausdorff 群には左不変積分が存在し，正数倍を除いて一意である．□

群 G は，たかだか可算個のコンパクト集合の合併で表わされるとき σ **コンパクト**であるという．可算基底をもつ局所コンパクトな群は σ コンパクトであることが知られている．よって，付録 A.1 の古典線形群はすべてそうである．

定理 6.2 (Riesz の表現定理)　σ コンパクトで局所コンパクトな Hausdorff 群 G の左不変積分 I に対して，正則な Borel 測度 μ がただ一つ存在して

$$I[f] = \int_{\mathsf{G}} f(x)\mathrm{d}\mu(x) \qquad \big(f \in \mathsf{C}_0(\mathsf{G})\big)$$

と書ける．この測度 μ は次の性質をもつ：

(i)　G の任意のコンパクト集合 K に対して $\mu(\mathsf{K}) < \infty$，任意の空でない開集合 U に対して $\mu(\mathsf{U}) > 0$.

(ii)　μ に関し可測な任意の集合 $\mathsf{E} \subset \mathsf{G}$ と，任意の $a \in \mathsf{G}$ に対し $\mu(a\mathsf{E}) = \mu(\mathsf{E})$.

---

*1　汎関数 (functional) とは，関数に数値を対応させる写像である．変数 x の関数を $f(x)$ と書くように，汎関数は $I[f]$ のように角括弧で書く．$I[f] = f(0)$ や $J[f] = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ は汎関数の例である．

I が右不変なとき (ii) は $\mu(\mathsf{E}a)=\mu(\mathsf{E})$ となる. □

この定理で定まる測度を**左 (右) 不変 Haar 測度**という. この定理により, 不変積分の定義域は, 台がコンパクトな C_0 から μ に関して絶対可積分な関数の全体, すなわち

$$\mathsf{L}_1(\mu)=\left\{f\in\{\mathsf{G}\text{ 上の複素数値関数 }\}\;\middle|\;\int_{\mathsf{G}}|f(x)|\mathrm{d}\mu(x)\right\}$$

まで拡大される. 定理 6.1 のいう一意性から

定理 6.3 局所コンパクトな Hausdorff 群の左不変積分 I の比は, 次の意味で右不変である:

$$\frac{I[f_b]}{I[g_b]}=\frac{I[f]}{I[g]}\qquad \Bigl(b\in\mathsf{G},\ f,g\in\mathsf{L}_1(\mathsf{G},\mu),\ I[g]\neq 0\Bigr).$$

［証明］ G の左不変積分を I とし, 任意の $b\in\mathsf{G}$ をとって新たに $J_b[f]:=I[f_b]$ を定義すれば, これはまた左不変積分である. 実際, $J_b[{}_af]=I[{}_af_b]$ は I の左不変性から $I[f_b]=J_b[f]$ に等しい. よって, 左不変積分の一意性から, ある正の定数 α_b が存在して $J_b[f]=\alpha_bI[f]$. すなわち

$$I[f_b]=\alpha_bI[f]\qquad \Bigl(\forall f\in\mathsf{L}_1(\mathsf{G},\mu)\Bigr). \tag{6.3}$$

定理にいう比をとれば α_b が消える. ∎

例 6.1 三角行列の群:

$$\mathsf{G}=\left\{\begin{pmatrix}\xi & \eta\\ 0 & \zeta\end{pmatrix}\;\middle|\;\xi,\zeta>0,\ \eta\in\mathsf{R}\right\}$$

この群 G の左不変積分を

$$I_{\mathrm{L}}[f]=\int_{\mathsf{G}}f(x)\mathrm{d}\mu(x),\quad \mathrm{d}\mu(x)=\rho(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

とおけば (必要なら ρ にデルタ関数も含めることにして), 左不変性

$$I_{\mathrm{L}}[{}_af]=\int_{\mathsf{G}}f(ax)\mathrm{d}\mu(x)=\int_{a^{-1}\mathsf{G}}f(x)\mathrm{d}\mu(a^{-1}x)$$

は

$$a^{-1}\mathsf{G}=\mathsf{G},\quad \mathrm{d}\mu(x)=\mathrm{d}\mu(a^{-1}x)\qquad (\forall a\in\mathsf{G}) \tag{6.4}$$

と同値である. $a^{-1}x$ を

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \eta \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi' & \eta' \\ 0 & \zeta' \end{pmatrix}$$

と書けば

$$\xi' = \alpha\xi, \quad \eta' = \alpha\eta + \beta\zeta, \quad \zeta' = \gamma\zeta$$

となり，$a^{-1}\mathsf{G} = \mathsf{G}$ は明らか．$\mathrm{d}\mu(x) = \mathrm{d}\mu(a^{-1}x)$ の方は

$$\frac{\rho(\xi', \eta', \zeta')}{\rho(\xi, \eta, \zeta)} \cdot \frac{\partial(\xi', \eta', \zeta')}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = 1 \tag{6.5}$$

を要求し，いまヤコビアンは$\alpha^2\gamma$であるから

$$\frac{\rho(\xi', \eta', \zeta')}{\rho(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{1}{\alpha^2\gamma} = \frac{\xi^2\zeta}{\xi'^2\zeta'}$$

となって

$$\rho(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\xi^2\zeta} \tag{6.6}$$

によって満たされる．こうして，三角行列の群の左不変積分は

$$I_{\mathrm{L}}[f] = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty f(\xi, \eta, \zeta) \frac{\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta}{\xi^2\zeta} \tag{6.7}$$

となる．$I_{\mathrm{L}}[1] = \infty$．この I_{L}は右不変ではない．右不変積分は

$$I_{\mathrm{R}}[f] = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty f(\xi, \eta, \zeta) \frac{\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta}{\xi\zeta^2} \tag{6.8}$$

である．やはり $I_{\mathrm{R}}[1] = \infty$．これを，三角行列の群の体積は無限大であるという． □

例 6.2 SU(2) §4.3 (a) によれば，この群 G の元 x は，3 次元球面 S^3上の点で表わされ，4 次元空間における直交座標 $(x_1, \cdots, x_4)$ は (4.13) のようにパラメタ表示される．変換 $x \mapsto ax$ $(a \in \mathsf{G})$ は球面上の移動，つまり回転である．変換 $x \mapsto xa$ も同様．(4.13) から得られる 3 本のベクトル

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)} &= \Big(\frac{-1}{2\sqrt{1-t}}\sin\psi, \ \frac{-1}{2\sqrt{1-t}}\cos\psi, \ \frac{1}{2\sqrt{t}}\sin\varphi, \ \frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\varphi \Big)\mathrm{d}t \\
\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)} &= \Big(\sqrt{1-t}\cos\psi, \ -\sqrt{1-t}\sin\psi, \ 0, \ 0 \Big)\mathrm{d}\psi \\
\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(3)} &= \Big(0, \ 0, \ \sqrt{t}\cos\varphi \ \ -\sqrt{t}\sin\varphi \Big)\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

は互いに直交して直方体をきめる．その体積 (3 本の長さの積) $\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\psi/2$ は回転によって不変だから，これを測度にとれば不変積分 I が得られる．この群 SU(2) では不変積分に左右の区別がない．群の体積は

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi^2$$

となる．この測度を $2\pi^2$ で割って群の体積を 1 にしよう．これを**測度の規格化** (normalization) という．規格化された測度を用いて，SU(2) の両側不変積分は

$$I[f] = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, f(t,\psi,\varphi) \tag{6.9}$$

なお，(4.17) のパラメタ表示をとれば，同様にして

$$I[g] = \frac{1}{16\pi^2}\int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_1 \int_0^{4\pi} \mathrm{d}\varphi_2\, g(\theta,\varphi_1,\varphi_2). \tag{6.10}$$

また，パラメタ表示 (4.11) をとれば

$$I[h] = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi} \sin^2\chi\,\mathrm{d}\chi \int_0^{\pi} \sin\eta\,\mathrm{d}\eta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\zeta\, h(\chi,\eta,\zeta). \tag{6.11}$$

どちらの場合にも，群の体積を計算すれば，当然のことながら $2\pi^2$ になる．□

例 6.3　SO(3)　定理 4.26 により

$$\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\{I,-I\} \tag{6.12}$$

であり，相互の元の関係は (4.29), (4.30) から定まる．これを利用して SO(3) の不変積分を SU(2) の不変積分 (6.9) で書き表わそう．

すなわち，f を SO(3) 上に与えられた複素数値連続関数とし

$$\tilde{f}(x) = f(\mathrm{Ad}\,x) \qquad \Big(x \in \mathrm{SU}(2)\Big) \tag{6.13}$$

によって SU(2) 上の関数を定義する．$\tilde{f}$ は連続である．そこで前の例で得た SU(2) 上の規格化された不変測度 μ を用いて

$$I[f] = \int_{\mathrm{SU}(2)} \tilde{f}(x)\mathrm{d}\mu(x) \tag{6.14}$$

とおけば，線形性は明瞭．そして左不変である．実際，任意の $a \in \mathrm{SO}(3)$ に対し $a = \mathrm{Ad}\,b$ をみたす SU(2) の元が存在するから

$$I[{}_af] = \int_{\mathrm{SU}(2)} f(a\mathrm{Ad}\,x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathrm{SU}(2)} f\Big(\mathrm{Ad}(bx)\Big)\mathrm{d}\mu(x)$$

となり，μ の不変性から，$I[f]$ に等しい．

ここで，準同形 (6.12) では SU(2) が SO(3) を二重に覆うことに注意しよう．これは，**普遍被覆** (universal covering) という重要な概念に属する．(4.15) によって，どの $g \in \mathrm{SO}(3)$ にも SU(2) の元

$$x = U_3(\varphi_1)U_1(\theta)U_3(\varphi_2) \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi_1 \leqq 2\pi,\ 0 \leqq \varphi_2 \leqq 4\pi) \tag{6.15}$$

の $(\theta, \varphi_1, \varphi_2), (\theta, \varphi_1, \varphi_2 + 2\pi)$ なる二つが対応する[*2]．$f(\mathrm{Ad}\,x)$ は，これら二つの点で同じ値をとるから，(6.10) は φ_2 の積分範囲を半分にして

$$I[f] = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_1 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_2 f(\mathrm{Ad}\,x) \tag{6.16}$$

とするのがよい．ただし，x は (6.15) で与えられ，$\mathrm{Ad}\,x$ は (4.18), (4.19) で与えられる． □

上の例で，群の体積 $I[1] = \mu(\mathsf{G})$ が有限の場合と無限大の場合とに出会った．これについて

定理 6.4 σ コンパクトで局所コンパクトな Hausdorff 群 G の不変 Haar 測度 μ が $\mu(\mathsf{G}) < \infty$ となるための必要十分条件は G がコンパクトなことである．

［証明］ μ を左不変とする．右不変な場合の証明も同様．まず，十分なことは明らかである．必要なことを，対偶をとって示そう．G はコンパクトでないとする．このとき，単位元 e のコンパクトな近傍 U に対し，G 内に $a_{n+1} \notin \sum_{i=1}^{n} a_i\mathsf{U}$ $(n = 1, \cdots)$ をみたす点列 $\{a_n\}$ がとれる．次に e の開近傍 V で $\mathsf{V}\mathsf{V}^{-1} \subset \mathsf{U}$ となるものをとれば，$\{a_n\mathsf{V}\}$ は，どの二つも交わらない開集合の列である．そして，μ が左不変なことから

$$\mu(\mathsf{G}) > \sum_{i=1}^{n} \mu(a_i\mathsf{V}) = n\mu(\mathsf{V})$$

となる．n は任意だから $\mu(\mathsf{G}) = \infty$ でなければならない． ▮

定理 6.5 コンパクトな Hausdorff 群の左右の不変積分は一致する．

［証明］ 規格化 $I[1] = 1$ により (6.3) で $\alpha_b = 1$ になっている． ▮

左不変積分が右不変でもある群 G は**ユニモデュラー** (unimodular) であるという．

最後に，証明はしないが

---

*2 $\theta = 0, \pi$ の場合は例外で，一つになる．

定理 6.6 (Fubini の定理) G, H を局所コンパクトな Hausdorff 群とし，I, J をそれぞれの左不変積分とする．このとき

$$I_x\Big[J_y[f(x,y)]\Big] = J_y\Big[I_x[f(x,y)]\Big] \quad \Big(f \in \mathsf{C}_0(\mathsf{G}\times\mathsf{H})\Big) \tag{6.17}$$

が成り立つ．ここに，$I_x[f(x,y)]$ は $f(x,y)$ の y を固定して得た関数に対する I の値を表わす．他も同様．(6.17) によって定まる汎関数 K は左不変である． □

この定理における I, J, K に対応する Haar 測度をそれぞれ μ, ν, ρ とするとき，ρ を μ と ν の**直積測度** (direct product measure) という．

§6.2 コンパクト群の表現

連続群の表現も，その同値性も有限群に対する定義 2.1, 2.2 と同様に定義される．そして，コンパクト Hausdorff 群 (この節ではコンパクト群と略称) に限れば，有限群の場合の定義も定理も大部分が簡単な読み替えで成り立つのである．

(a) 有限群の諸性質の読み替え

有限群の場合の定義や定理を思いだしながら ([ ]に引用)，連続群の場合を説明しよう．V は K 上の有限次元ベクトル空間とする．

定義 6.2 [定義 2.1] 群 G から GL(V) への代数的準同形 ρ は，V の各元 $\boldsymbol{v}$ ごとに写像 $f: x \mapsto \rho(x)\boldsymbol{v}$ ($x \in \mathsf{G}$) が連続なら，G の V 上での表現であるという．□

有限群の場合より連続性の要請だけ多い．ここで，位相群 G からベクトル空間 V への写像 f が連続であるとは，V の一つの基底に関する $f(x)$ ($x \in \mathsf{G}$) の成分が x に関して連続なことをいう．

有限群の場合の (2.17) に対応して，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathsf{V}$ の内積を次式で定義する：

$$\langle v, w\rangle = \int_{\mathsf{G}} \Big(\rho(x)\boldsymbol{v}, \rho(x)\boldsymbol{w}\Big)\mathrm{d}\mu(x). \tag{6.18}$$

ここに，μ は G の規格化された Haar 測度であり (定理 6.2 および定理 6.5 参照)，$(\cdot,\cdot)$ は V での内積を意味する．(6.18) の不変性により，コンパクト群 G の任意の表現はユニタリ表現に同値であり [定理 2.1]，また完全可約である [定理 2.5]．$U = (u_{ij})$, $V = (v_{kl})$ を G の既約ユニタリ表現行列とすれば，直交関係 (2.38)

が成り立つ．その証明には μ の左不変性が使われる．

そこで，コンパクト群 G の既約ユニタリ表現の集合 M で，どの二つの元も同値でなく，G の任意の既約ユニタリ表現が M のどれかの表現と同値であるとき M を G の既約ユニタリ表現の代表系，あるいは**完全系** (complete system) という．その各表現の表現行列 (u_{ij}^{λ}) からつくった関数系 (2.39) は完全正規直交系をなす［Peter–Weyl の定理，定理 2.12］．ただし，M の表現は有限個ではなく，(2.39) で表現を区別する添え字 $k = 1, \cdots, m$ は連続的な値もとる $\lambda \in \Lambda$ に替えておく．この定理の証明は，やや長くなるので次の (b) に述べる．

コンパクト群 G の表現 ρ の指標 χ^{ρ} を (2.61) で定義すれば，既約指標の第1直交関係［定理 2.14］および既約分解における重複度の公式 (2.64) が成り立ち，表現の同値性，既約性の判定も指標を用いて有限群の場合と同様にできる［定理 2.15, 2.16］．

(b)　Peter–Weyl の定理

定理 6.7［Peter–Weyl の定理］　$\{U^{\lambda}, \lambda \in \Lambda\}$ をコンパクト群の既約ユニタリ表現行列の代表系とする．$d_{\lambda} = \deg U^{\lambda}$ とし，表現行列 $U^{\lambda}(x) = \left(u_{ij}^{\lambda}(x)\right)$ ($x \in$ G) を x の関数とみて関数系 $\{\sqrt{d_{\lambda}}u_{ij}^{\lambda},\ i, j = 1, \cdots, d_{\lambda},\ \lambda \in \Lambda\}$ をつくれば，これは $\mathsf{L}^2(\mathsf{G})$ の完全正規直交系となる．

［証明］　正規直交系をなすことは有限群の定理 2.10 の読み替えで得られているから，すべての u_{ij}^{λ} と直交する $\mathsf{L}^2(\mathsf{G})$ の元が 0 しかないことを示せばよい．

第1段　h は G 上の連続関数で $h(x^{-1}) = \overline{h(x)}$ をみたすものとする．h がすべての u_{ij}^{λ} と直交するなら $h = 0$ であることを示そう．いま，仮に $h \neq 0$ として

$$(\hat{A}f)(x) := \int_{\mathsf{G}} h(xy^{-1})f(y)\mathrm{d}\mu(y) \qquad \left(f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{G})\right)$$

によって L^2 における線形変換 $\hat{A}$ を定義すれば，これは 0 でない有界な自己共役変換である．有界性は Schwarz の不等式と G がコンパクトなこと (したがって，連続関数 h は G 上で最大値をとり，また G の体積は有限) から得られ，自己共役性は

$$\int_{\mathsf{G}} \overline{g(x)}(\hat{A}f)(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathsf{G}} \mathrm{d}\mu(x) \int_{\mathsf{G}} \mathrm{d}\mu(y)\overline{h(yx^{-1})g(x)}f(y) \qquad (6.19)$$

から Fubini の定理 6.6 によってわかる．したがって，Hilbert–Schmidt の定理により $\hat{A}$ は少なくとも一つ 0 でない固有値 σ をもち，それに属する固有空間 E_σ は有限次元である．その任意の元 ψ は，$\hat{A}$ の自己共役性からすべての u^λ_{ij} と直交する．さて，

$$(\hat{T}_x f)(y) := f(yx) \qquad \left(x \in \mathsf{G},\ f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{G})\right)$$

を定義しよう．これはユニタリ変換で $\hat{A}$ と可換なことが容易にわかる．したがって，$\hat{T}$ は E_σ を不変にし，この上に制限した $\hat{U}_x := \hat{T}_x \Big|_{\mathsf{E}_\sigma}$ は E_σ 上のユニタリ変換である．これは既約ユニタリ表現の直和に分解されるから，その中の表現 λ をとり，その表現空間の基底を $\{\chi_1, \cdots, \chi_d\}$ とすれば

$$(\hat{U}_x \chi_j)(y) = \sum_{i=1}^{d} u^\lambda_{ij} \chi_i(y)$$

が成り立ち，左辺は $\chi_j(yx)$ に等しいから，$y = e$ とおけば χ_j が u^λ_{ij} で展開されることになる．ところが，E_σ のどの元もすべての u^λ_{ij} に直交するのだから $\mathsf{E}_\sigma = \{0\}$．これは矛盾である．したがって，$h = 0$ でなければならない．

第 2 段　$f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{G})$ が，すべての u^λ_{ij} と直交すれば $f = 0$ であることを示す．すべての u^λ_{ij} と直交する $f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{G})$ をとり

$$s(x) = \int_{\mathsf{G}} f(xy)\overline{f(y)}\mathrm{d}\mu(y)$$

とおけば，これは G 上の連続関数で，すべての u^λ_{ij} と直交する．実際，直交性は

$$\langle u^\lambda_{ij}, s\rangle = \int_{\mathsf{G}}\int_{\mathsf{G}} \overline{u^\lambda_{ij}(x)} f(xy)\overline{f(y)}\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x)$$

が —— μ の右不変性を利用して積分変数を x から $z = xy$ に変えれば ——

$$\int_{\mathsf{G}} f(z)\overline{u^\lambda_{ij}(zy^{-1})}\mathrm{d}\mu(z)$$

を含み，$u^\lambda_{ij}(zy^{-1}) = \sum_{k=1}^{d} u^\lambda_{ik}(z)u^\lambda_{kj}(y^{-1})$ と書けることからわかる．

そこで，$h(x) = s(x) + \overline{s(x^{-1})}$ とおけば，これは第 1 段の h の仮定をみたすから $h = 0$．ところが，$h(e) = 2\mathrm{Re}[s(e)]$ だから

$$s(e) = \int_{\mathsf{G}} |f(y)|^2 \mathrm{d}\mu(y) = 0.$$

ゆえに，$f=0$ である． ∎

例 6.4 円周上の並進群 長さ L の円周 $[0,L]$ 上に定義された連続関数 ψ $\bigl(\psi(\xi+L)=\psi(\xi),\ \xi\in[0,L]\bigr)$ の全体がつくる線形空間を V とする．そこで

$$(\rho_x\psi)(\xi)=\psi(\xi-x),\quad \rho_L=I \tag{6.20}$$

のように作用する ρ_x は群 $\mathsf{G}=\{\rho_x, x\in[0,L]\}$ をなし，円周上の**並進群**とよばれる (例 1.8 を参照)．

その規格化された Haar 測度は，並進不変性の要求から

$$\mathrm{d}\mu(x)=\frac{1}{L}\mathrm{d}x. \tag{6.21}$$

G は Abel 群なので既約表現はすべて 1 次元である ($d_\lambda=1$)．その表現 “行列” $u^\lambda(x)$ は

$$u^\lambda(x)u^\lambda(y)=u^\lambda(x+y),\quad u^\lambda(0)=u^\lambda(L)=1$$

を満たさねばならないから

$$u_n(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_nx}\quad\left(k_n=\frac{2n\pi}{L},\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right) \tag{6.22}$$

となる．ただし，表現のラベル λ を下付きの n に替えた．Peter–Weyl の定理は，(6.22) の u_n の全体が測度 (6.21) に関して $\mathsf{L}^2([0,L],\mu)$ の完全正規直交系をなすことをいう．確かにそうであることは Fourier 級数の理論からも知られる． □

§6.3 SU(2) と回転群 SO(3) の表現

集合 $\{0,1/2,1,3/2,2,\cdots\}$ を $\mathcal{M}$ とする．$l\in\mathcal{M}$ ごとに，z のたかだか $2l$ 次の複素係数多項式全体のつくる複素線形空間を V_l とし，その元 $f=\sum_{k=0}^{2l}a_kz^k,\cdots$ の間に内積

$$(f,g)=\left(\sum_{k=0}^{2l}a_kz^k,\sum_{k=0}^{2l}b_kz^k\right)=k!(2l-k)!\bar{a}_kb_k \tag{6.23}$$

を入れておく[*3]．この内積は，明らかに線形性，正定値性 ($f\in\mathsf{V}_l$ に対し (f,f)

*3 f は V_l のベクトルだから太文字で書きたいところだが，後の (6.27) などもあり，一貫するのが難しい．

$\geqq 0$，等号は $\boldsymbol{f}=0$ のときのみ) をもつ．このとき

$$\boldsymbol{v}_m(z)=\frac{z^{l-m}}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!}} \qquad (m=-l,-l+1,\cdots,l) \tag{6.24}$$

は V_l の正規直交基底をなす．

(a)　SU(2) の表現

まず，SU(2) の元 x を定義 (4.9) にしたがって

$$x=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \qquad (\delta=\bar{\alpha},\ \gamma=-\bar{\beta},\ |\alpha|^2+|\beta|^2=1) \tag{6.25}$$

と書き，対応する $\rho^{(l)}(x)$ を

$$\rho^{(l)}(x)\cdot z^{l-m}=(\beta z+\delta)^{2l}\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right)^{l-m} \qquad (-l\leqq m\leqq l) \tag{6.26}$$

と定義すれば，これは V_l における線形変換となるばかりでなく SU(2) の演算

$$\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha'\alpha+\beta'\gamma & \alpha'\beta+\beta'\delta\\ \gamma'\alpha+\delta'\gamma & \gamma'\beta+\delta'\delta\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\alpha'' & \beta''\\ \gamma'' & \delta''\end{pmatrix}$$

に照応して

$$\begin{aligned}&\rho^{(l)}(x')\rho^{(l)}(x)\cdot z^{l-m}\\ &=\rho^{(l)}(x')\cdot(\beta z+\delta)^{2l}\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right)^{l-m}\\ &=(\beta' z+\delta')^{2l}\left(\beta\frac{\alpha' z+\gamma'}{\beta' z+\delta'}+\delta\right)^{2l}\left(\frac{\alpha(\alpha' z+\gamma')+\gamma(\beta' z+\delta')}{\beta(\alpha' z+\gamma')+\delta(\beta' z+\delta')}\right)^{l-m}\end{aligned}$$

となり，整理すると

$$\rho^{(l)}(x')\rho^{(l)}(x)\cdot z^{l-m}=\rho^{(l)}(x'')\cdot z^{l-m} \qquad (-l\leqq m\leqq l)$$

が見いだされる．これを，線形性によって z の多項式の空間 V_l 全体に広げよう：

$$\left(\rho^{(l)}(x)f\right)(z)=(\beta z+\delta)^{2l}f\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right) \quad (f\in\mathsf{V}_l) \tag{6.27}$$

と定める．この写像 $x\mapsto\rho_l(x)f$ は，(6.23) の定める V のノルムに関して V_l の各元 f ごとに連続である．なぜなら，多項式 $\rho^{(l)}(x)f$ の係数は x の行列要素の

多項式だから．こうして，定義 6.2 にかなう SU(2) の表現 $(\rho^{(l)}, \mathsf{V}_l)$ が得られた．その性質を見よう：

(1) **ユニタリ性** この表現はユニタリである．これを証明するには，V_lを生成するような集合の任意の元 f, g に対して内積の保存

$$(\rho^{(l)}(x)f, \rho^{(l)}(x)g) = (f, g) \qquad (x \in \mathsf{G}) \tag{6.28}$$

が成り立つことを示せばよい．そのような集合として，いまは次数が $2l$ にそろった

$$q_s(z) = (\omega^s z + 1)^{2l} \quad (s = 0, 1, \cdots, 2l-1); \quad q_{2l}(z) = z^{2l}$$

が便利である．ここに，たとえば，$\omega := \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/2l}$．これらが V_lを生成することは

$$q_s(z) = \sum_{k=0}^{2l} {}_{2l}\mathrm{C}_k \omega^{sk} z^k \quad (k = 0, \cdots, 2l-1) \quad と \quad q_{2l}(z) = z^{2l}$$

を連立 1 次方程式として z^mについて解くときの係数の行列式が Vandermonde の行列式の正数倍になることからわかる．そして，一般に内積は

$$\left((az+b)^{2l}, (cz+d)^{2l}\right) = \sum_{k=0}^{2l} k!(2l-k)!\,({}_{2l}\mathrm{C}_k)^2\,(\bar{a}c)^k(\bar{b}d)^{2l-k}$$
$$= (2l)!(\bar{a}c + \bar{b}d)^{2l} \tag{6.29}$$

となる．他方 $\rho^{(l)}(x)(az+b)^{2l} = [(\alpha a + \beta b)z + (\gamma a + \delta b)]^{2l}$ から

$$\left(\rho^{(l)}(x)(az+b)^{2l}, \rho^{(l)}(x)(cz+d)\right)$$
$$= (2l)![\overline{(\alpha a + \beta b)}(\alpha c + \beta d) + \overline{(\gamma a + \delta b)}(\gamma c + \delta d)]^{2l}$$

となるが，(6.25) の括弧内に示した関係により (6.29) に等しい．よって，(6.28) が成り立つ．

(2) **既約性** 証明は Schur の補題 2.6 (のコンパクト群への読み替え) によることとし，SU(2) の特別の元に対する $\rho^{(l)}$の作用

$$x_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}: \quad \rho^{(l)}(x_1)z^{l-m} = \alpha^{-2m}z^{l-m}$$
$$x_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}: \quad \rho^{(l)}(x_2)z^{2l} = (z\cos\theta + \sin\theta)^{2l} \tag{6.30}$$

に注意して，V_lの線形変換 A で $\rho^{(l)}(x)A = A\rho^{(l)}(x)$ $(\forall a \in \mathsf{G})$ となるものは恒等変換の定数倍しかないことを示そう．(6.27) から $\rho^{(l)}(x_1)Az^{l-m} = \alpha^{-2m}Az^{l-m}$となり，$Az^{l-m}$が $\rho^{(l)}(x_1)$ の固有値 α^{-2m}の固有空間に属することがわかる．α を固有値 $\alpha^{2l}, \alpha^{2l-2}, \cdots, \alpha^{-2l}$に縮退がないように選べば各固有空間は 1 次元と知れ，$Az^{l-m} = \lambda_m z^{l-m}$．この固有値 λ_mが互いに等しいことは，(6.30) によって知られる：

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{\rho^{(l)}\Big(x(\theta)\Big)A - A\rho^{(l)}\Big(x(\theta)\Big)\right\}z^{2l} \\ &= \sum_{k=0}^{2l}(\lambda_{2l} - \lambda_k)\,{}_{2l}\mathrm{C}_k z^k \cos^k\theta \sin^{2l-k}\theta. \end{aligned}$$

(3) **完全性**　これは，上の $\{(\rho^{(l)}, \mathsf{V}_l),\ l \in \mathcal{M}\}$ (あるいは，いずれかに同値なもの) 以外に既約表現がないことである．それを確かめるには指標の直交性を利用する．

SU(2) の元 (6.25) は，ユニタリだから，適当なユニタリ変換 U で対角化される．固有値は

$$\lambda = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}\right)^2}$$

となるので，SU(2) のパラメタ (4.11) をとれば簡明になる：

$$x = U \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi} \end{pmatrix} U^{-1} \qquad (0 \leqq \xi \leqq 2\pi). \tag{6.31}$$

ところが (6.26) によれば V_lの基底に対して $\rho^{(l)}\Big(x(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi})\Big)z^m = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(l-k)\xi}z^m$ となるから，表現 $(\rho^{(l)}, \mathsf{V}_l)$ の指標は

$$\chi^{(l)}(x) = \sum_{k=0}^{2l} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(l-k)\xi} = \frac{\sin(2l+1)\xi}{\sin\xi} \tag{6.32}$$

$$\Big(l = 0, 1/2, 1, \cdots;\ 0 \leqq \xi \leqq 2\pi\Big).$$

他のパラメタ表示をとった場合，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}$は各行列 $x \in$ SU(2) の固有値である (下の例 6.5 を参照)．指標が ξ の (変域を $(-\infty, \infty)$ に広げるとして) 偶関数になったのは偶然ではない．SU(2) の元はどれも (6.31) に同値であるが，さらに $\xi \to -\xi$ としたものとも同値なのである．実際：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\xi} & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-i\xi} & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{pmatrix}$$

よって，類関数はすべて偶関数である．また周期 2π をもつ．

いま，(6.32) のもの以外に，これらに同値でない表現があったとし，その指標を χ_{ex} としよう．それは，やはり周期 2π の偶関数のはずである．ところが，(6.32) を l の小さい方から並べてみると

$$\chi^{(0)} = 1, \quad \chi_{1/2} = e^{-i\xi} + e^{i\xi}, \quad \chi^{(1)} = e^{-2i\xi} + 1 + e^{2i\xi}, \cdots$$

となり，これらの線形結合で表わせる関数は $\{1, \cos\xi, \cos 2\xi, \cdots\}$ を用いても表わせる．逆も真である．例 6.4 の結果によれば，周期 2π の偶関数は後者で表わせるから問題の指標 χ_{ex} もそうで，したがって前者でも表わせる：

$$\chi_{\mathrm{ex}}(\xi) = \sum_{l\in\mathcal{M}} \gamma_l \cos l\xi = \sum_{l\in\mathcal{M}} \gamma_l' \chi^{(l)}(\xi) \tag{6.33}$$

しかし，同値でない表現の指標は互いに直交するから (有限群の定理 2.14 の読み替え)，これは矛盾である．よって，SU(2) の表現は上に構成した $\{(\rho^{(l)}, \mathsf{V}_l),\ l \in \mathcal{M}\}$ でつきている．

以上をまとめて

定理 6.8 (6.27) によって定義される SU(2) の表現 $(\rho^{(l)}, \mathsf{V}_l)$, $l \in \mathcal{M}$ は既約ユニタリ表現の完全系をなす． □

例 6.5 (SU(2) の既約表現の構成) 既約表現を具体的につくってみよう．$(\rho^{(l)}, \mathsf{V}_l)$ の表現行列を $R^{(l)}$ とする．

(i) $l = 0$：V_0 は 1 次元．

$$R^{(0)}(x) = 1,\ \chi^{(0)}(x) = \mathrm{tr}\, R^{(0)}(x) = 1 \quad \big(\forall x \in \mathrm{SU}(2)\big).$$

(ii) $l = 1/2$：$\mathsf{V}_{1/2}$ の基底 (6.24) は

$$\boldsymbol{v}_{1/2} = 1, \qquad \boldsymbol{v}_{-1/2} = z \tag{6.34}$$

で，(6.26) により (4.16) の $U_1(\theta) \in \mathrm{SU}(2)$ に対して，$\rho_1(\theta) := \rho^{1/2}\big(U_1(\theta)\big)$ の略記法で

$$\rho_1(\theta)\boldsymbol{v}_{1/2} = \rho_1(\theta)\cdot 1 = iz\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}$$

$$= \cos\frac{\theta}{2}\cdot \boldsymbol{v}_{1/2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\cdot \boldsymbol{v}_{-1/2},$$

$$\rho_1(\theta)\boldsymbol{v}_{-1/2} = \rho_1(\theta)\cdot z = z\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\cdot \boldsymbol{v}_{1/2} + \cos\frac{\theta}{2}\cdot \boldsymbol{v}_{-1/2}$$

となる．したがって，変換

$$\rho_1(\theta)\Big(c_{1/2}\boldsymbol{v}_{1/2} + c_{-1/2}\boldsymbol{v}_{-1/2}\Big) = c'_{1/2}\boldsymbol{v}_{1/2} + c'_{-1/2}\boldsymbol{v}_{-1/2}$$

は表現行列 $R^{(1/2)}$ によって次のように書かれる：

$$\begin{pmatrix} c'_{1/2} \\ c'_{-1/2} \end{pmatrix} = R_1^{(1/2)}(\theta)\begin{pmatrix} c_{1/2} \\ c_{-1/2} \end{pmatrix},$$
$$R_1^{(1/2)}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2} \\ \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{6.35}$$

同様に，$U_3(\varphi) \in \mathrm{SU}(2)$ に対しては

$$\rho_3(\varphi)\boldsymbol{v}_{1/2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}\boldsymbol{v}_{1/2}, \quad \rho_3(\varphi)\boldsymbol{v}_{-1/2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}\boldsymbol{v}_{-1/2}$$

から

$$R_3^{(1/2)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} \end{pmatrix}. \tag{6.36}$$

が得られる．指標は

$$\chi^{1/2}\Big(U_1(\theta)\Big) = 2\cos\frac{\theta}{2}, \quad \chi^{1/2}\Big(U_3(\varphi)\Big) = 2\cos\frac{\varphi}{2} \tag{6.37}$$

となり，それぞれ (6.32) の ξ を $\theta/2, \varphi/2$ にとったものと一致する．これで変域も正しく対応することに注意しよう．

SU(2) の他の元の表現行列は (4.15) との対応により計算される．

(iii) $l = 1$：V_1の基底 (6.24) は

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{v}_0 = z, \quad \boldsymbol{v}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}z^2 \tag{6.38}$$

で，(6.26) により (4.16) の $U_1(\theta) \in \mathrm{SU}(2)$ に対して，上と同様の略記法で

$$\rho^{(1)}\boldsymbol{v}_1 = \cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\boldsymbol{v}_1 + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sin\theta\cdot\boldsymbol{v}_0 - \sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\boldsymbol{v}_{-1},$$

$$\rho^{(1)}\boldsymbol{v}_0 = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sin\theta\cdot\boldsymbol{v}_1 + \cos\theta\cdot\boldsymbol{v}_0 + \frac{\mathrm{i}}{2}\sin\theta\cdot\boldsymbol{v}_{-1},$$

$$\rho^{(1)}\boldsymbol{v}_{-1} = -\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\boldsymbol{v}_1 + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sin\theta\cdot\boldsymbol{v}_0 + \cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\boldsymbol{v}_{-1}$$

のように変わり，この変換行列は見慣れない形になるが，基底をユニタリ変換で

$$\boldsymbol{v}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_{-1}), \quad \boldsymbol{v}_y = \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{i}}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_{-1}), \quad \boldsymbol{v}_z = \mathrm{i}\boldsymbol{v}_0 \tag{6.39}$$

に変えれば

$$\begin{aligned} \rho^{(1)}\boldsymbol{v}_x &= \cos\theta\cdot\boldsymbol{v}_x + \sin\theta\cdot\boldsymbol{v}_z \\ \rho^{(1)}\boldsymbol{v}_y &= \boldsymbol{v}_y \\ \rho^{(1)}\boldsymbol{v}_z &= -\sin\theta\cdot\boldsymbol{v}_x + \cos\theta\cdot\boldsymbol{v}_z \end{aligned} \tag{6.40}$$

となる．変換行列は，$U_3(\varphi)$ に対するものも並べて書くと

$$\begin{aligned} R_1^{(1)}(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \\ R_3^{(1)}(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.41}$$

□

定理 6.9 (積表現の簡約)

$$\rho^{(l)}\otimes\rho^{(l')} \cong \rho^{(l+l')}\oplus\rho^{(l+l'-1)}\oplus\cdots\oplus\rho^{(|l-l'|)} \qquad (l, l' \in \mathcal{M})$$

これを SU(2) に対する **Clebsch–Gordan の法則**という．

［証明］ 左辺の積表現の指標は，定理 2.13 の (v) により (6.32) の積として得られる．いま $l > l'$ として

$$\chi^{(l)}\chi^{(l')} = \frac{1}{\sin\xi}\mathrm{Im}\frac{\sin(2l'+1)\xi\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2l+1)\xi}}{\sin\xi}$$

$$= \frac{1}{\sin\xi} \mathrm{Im} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}[2(l+l')+3]\xi} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}[2(l-l')+1]\xi}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\xi} - 1}$$

のように計算すれば，等比級数の和の公式により

$$\chi^{(l)}\chi^{(l')} = \chi^{(l+l')} + \chi^{(l+l'-1)} + \cdots + \chi^{(|l-l'|)} \qquad (6.42)$$

が知れ，定理 2.13 の (iv) と同値性判定の定理 2.15 により定理が得られる． ∎

定理 6.10 SU(2) の表現 $(\rho^{(l)}, \mathsf{V}_l)$ は，半整数の l に対しては忠実であり (定義 2.1)，正の整数 l に対しては $\mathrm{Ker}(\rho^{(l)}) = \{e, -e\}$ である．

［証明］ $\rho^{(l)}(x)$ が恒等変換になる x の条件は，$\forall m \in \mathcal{M}$ に対して (6.26) の右辺を z^{l-m} にすることである．$m = l$ とおくと $\beta = 0$, $\delta^{2l} = 1$．このとき $\gamma = 0$, $\alpha = \bar{\delta}$ なので $\alpha^{2m} = 1$．ゆえに，l が半整数の場合は $m = 1/2$ とおいて $\alpha = 1$，したがって $x = e$ となる．l が整数の場合は $\delta = \alpha = \pm 1$ (複号同順) でよく，$x = e, -e$． ∎

(b) SO(3) の表現 —— SU(2) の表現からつくる

SO(3) の既約ユニタリ表現は，定理 4.26 により SU(2) の表現から得られる．(D, V) を SO(3) のユニタリ表現とすれば，(4.23) で定義される，SU(2) から SO(3) への準同形射像 Ad との合成

$$T = D \circ \mathrm{Ad} \qquad (6.43)$$

により (T, V) は SU(2) のユニタリ表現となる．そして，D が既約なら T も既約，逆も真である．実際，Ad は全射だから (定理 4.26)，T が不変部分空間をもつことは D が不変部分空間をもつことにほかならず，D が既約でないことになる．逆に，D が既約でなければ当然 T は既約でない．

(6.43) によって SU(2) の表現から SO(3) の表現をつくることを考えよう．定理 4.26 により Ker(Ad)$= \{I, -I\}$ だから，(6.43) から D が定まるためには $\mathrm{Ker}(T) = \{I, -I\}$ が必要十分である．したがって定理 6.10 より

定理 6.11 l を負でない整数とする．SU(2) の表現 $\rho^{(l)}$ から $\rho^{(l)} = D^{(l)} \circ \mathrm{Ad}$ によって定義される SO(3) の表現はユニタリで既約である．逆に，SO(3) の任意の既約ユニタリ表現は，ある負でない整数 l に対する D_l に同値である．したがって，$\{D_l, l = 0, 1, 2, \cdots\}$ は，SO(3) の既約ユニタリ表現の完全系をなす． □

SO(3) の既約指標について

定理 6.12 SO(3) の既約表現 $D^{(l)}$の指標を $\psi^{(l)}$ とすれば

(i) $\psi^{(l)}(\pm 1) = 2l+1$

(ii) $\psi^{(l)}(x) = \dfrac{\sin(l+1/2)\,\theta}{\sin(\theta/2)} \qquad \Bigl(x \in \mathrm{SO}(3),\ x \neq \pm e\Bigr)$

ここに，θ は x の表わす回転の回転角である．

［証明］ SO(3) の元は回転を表わし，回転角が等しければ同値だから $x = PR_3(\varphi)P^{-1}$ $(P \in \mathrm{SO}(3))$ と書ける．$R_3(\varphi)$ は (4.19) で定義され，(4.29) により $R_3(\varphi) = \mathrm{Ad}\,U_3(\varphi)$．そして

$$\psi^{(l)}(x) = \psi^{(l)}\Bigl(\mathrm{Ad}\,U_3(\varphi)\Bigr) = \chi^{(l)}\Bigl(U_3(\varphi)\Bigr)$$

と (6.32) から定理の (ii) が得られる．(6.32) の ξ は，いま $\varphi/2$ であることに注意． ∎

定理 6.13 (SO(3) の積表現の簡約)

$D^{(l)} \otimes D^{(l')} \cong D^{(l+l')} \oplus D^{(l+l'-1)} \oplus \cdots \oplus D^{(|l-l'|)}$ 　(l, l' : 負でない整数)

これは SO(3) に対する **Clebsch–Gordan の法則**である．

［証明］ 定理 6.9 の証明に同じ． ∎

(c) 調和多項式上の SO(3) の表現

l を任意の負でない整数とし，三つの実変数 x, y, z の複素係数 l 次同次多項式

$$p_l(x,y,z) = \sum_{\lambda+\mu+\nu=l} a_{\lambda\mu\nu} x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} \tag{6.44}$$

の全体 $\mathcal{H}_l$を考える．x, y, z が SO(3) の変換 (4.14) を受けると $\mathcal{H}_l$に線形変換が起こるから SO(3) の表現が得られる．これは，しかし一般には既約でない．実際，$l=2$ のとき $\{a(x^2+y^2+z^2) : a \in \mathsf{C}\}$ は SO(3) の変換に関して $\mathcal{H}_2$の不変部分空間である．

そこで，$\mathcal{H}_l$の元で Laplace の方程式

$$\Delta\, p_l(x,y,z) = 0 \qquad \left(\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tag{6.45}$$

をみたすものの全体 H_lをとる．これは $\mathcal{H}_l$の部分空間であって，SO(3) でラプラシアン Δ が不変だから，これも不変である．そこで：

定理 6.14 任意の負でない整数 l と $g \in \mathrm{SO}(3)$ に対して H_l上の 1 次変換 D_l'

を

$$\Big(D_l'(g)p_l\Big)(\boldsymbol{r}) = p_l(\boldsymbol{r}g^{-1}) \qquad \Big(p_l \in \mathsf{H}_l,\ \boldsymbol{r} = (x, y, z)\Big)$$

によって定めれば，(D_l', H_l) は SO(3) の表現になる． □

これが既約であることを，まず例で見よう．

例 6.6 ($l = 1$ の場合) 変換 (4.18) は適当な $T \in \mathrm{SO}(3)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ をとれば $R = T^{-1}R_3(\varphi)T$ の形に書ける．これによって H_1上におこる変換は R そのものであって，この表現の指標は

$$\mathrm{tr}\, R = 2\cos\varphi + 1 = \frac{\sin(l + 1/2)}{\sin(\varphi/2)} \qquad (l = 1) \tag{6.46}$$

となり，定理 6.12 の ψ_1に一致する． □

例 6.7 ($l = 2$ の場合) $\xi = x + \mathrm{i}y$とおけば

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\bar{\xi}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{6.47}$$

となるので，H_2は

$$\xi^2, \quad \xi z, \quad \xi\bar{\xi} - 2z^2, \quad \bar{\xi}z, \quad \bar{\xi}^2 \tag{6.48}$$

で張られるとしてよい．前の例の変換 R は，特に $T = 1$ の場合をとれば，z 軸まわりの角 φ の回転であって，(6.48) のそれぞれを $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \cdots, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}$倍する．したがって，この場合

$$\mathrm{tr}\, R = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \cdots + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi} \tag{6.49}$$

は，やはり定理 6.12 の ψ_2に一致する．

$T \neq 1$ の場合には，あらかじめ T で変換した座標軸について上と同様の考察をすればよい． □

こうして，調和多項式の空間 H_lの上の SO(3) の表現は，$l = 1, 2$ の場合，さきに SO(2) の表現から構成した表現 D_lに同値であり，したがって既約であることが分かった．一般の場合の証明には，次節で説明するウェイトを利用するのが便利である (演習問題 6.4)．

極座標 (r, θ, φ) を

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \tag{6.50}$$

$(0 \leqq r < \infty,\ 0 \leqq \theta < \pi,\ 0 \leqq \varphi < \pi)$ によって導入すれば，ラプラシアンは

$$\Delta = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\} \tag{6.51}$$

となる．l 次の調和多項式を，z 軸まわりの回転に対する変換が見やすい形

$$q_l^m(x,y,z) = r^l P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \quad (m = -l, -l+1, \cdots, l) \tag{6.52}$$

に書けば，$P_l^m(\zeta)$ は

$$(1-\zeta^2)\frac{d^2}{d\zeta^2} - 2\zeta\frac{d}{d\zeta} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\zeta^2}\right]P_l^m(\zeta) = 0 \tag{6.53}$$

をみたし，$-1 \leqq \zeta \leqq 1$ で有界な関数として特徴づけられる．いわゆる (第1種の) Legendre 陪関数である．$P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$ は規格化して $Y_l^m(\theta,\varphi)$ とおく．これは，次の正規直交関係をみたす：

$$\int_0^\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \overline{Y_{l'}^{m'}}(\theta,\varphi) Y_l^m(\theta,\varphi) = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'} \tag{6.54}$$

$Y_l^m(\theta,\phi)$ を**球面調和関数** (spherical harmonics) とよぶ．例をあげれば：

$$\begin{aligned}
&Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}},\\
&Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_1^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}\\
&Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1), \quad Y_2^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}\\
&Y_2^{\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\,\mathrm{e}^{\pm2\mathrm{i}\varphi}
\end{aligned} \tag{6.55}$$

§6.4 線形 Lie 群の表現と Lie 代数の表現

V を K 上の n 次元線形空間とする．V の線形変換 $A, B, \cdots$ の全体は K 上の線形空間をなすが，交換子積を

$$[A,B] = AB - BA \tag{6.56}$$

によって導入すれば K 上の Lie 代数となる．これを $\mathfrak{gl}(\mathrm{V})$ と記す．

定義 6.3 K 上の (抽象)Lie 代数 $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}(\mathrm{V})$ への準同形写像 ρ を $\mathfrak{g}$ の K 上の (線形) 表現という．準同形の条件は

$$\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$$
$$\rho(cX) = c\rho(X) \qquad (X, Y \in \mathfrak{g},\ c \in \mathsf{K}) \tag{6.57}$$
$$\rho([X,Y]) = [\rho(X), \rho(Y)]$$

V を ρ の表現空間といい，その次元を ρ の次数といって $\deg(\rho)$ と記す． □

例 6.8 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のすべての元に $\mathfrak{gl}(\mathsf{V})$ の零元を対応させる写像は $\mathfrak{g}$ の表現である．これを $\mathfrak{g}$ の**自明な表現** (trivial representation) という． □

例 6.9 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の元 A に対して

$$\mathrm{ad}(A)\,X = [A, X] \qquad (X \in \mathfrak{g}) \tag{6.58}$$

により $\mathfrak{g}$ における線形変換 $\mathrm{ad}(A)$ が定義される．Jacobi の恒等式から

$$[\mathrm{ad}(A), \mathrm{ad}(B)]Y = [A,[B,Y]] - [B,[A,Y]]$$
$$= [[A,B],Y] = \mathrm{ad}([A,B])Y \quad (\forall Y \in \mathfrak{g})$$

が成り立つので，写像 ad は $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}$ 上の表現となる．これを $\mathfrak{g}$ の**随伴表現** (adjoint representation) という． □

G を線形 Lie 群とし，$T : \mathsf{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathsf{V})$ をその表現とする．G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対し，定理 5.3 により

$$T\Big(\exp[tX]\Big) = \exp[t\rho(X)] \qquad (t \in \mathsf{R},\ X \in \mathfrak{g}) \tag{6.59}$$

を満足する準同形写像 $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathsf{V})$ がただ一つ存在する．これを T の**微分表現**といい，$\mathrm{d}T$ と記す．

例 6.10 G を線形 Lie 群，$\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とする．G の随伴表現 Ad(例 6.9) の微分表現は $\mathfrak{g}$ の随伴表現 ad に等しい． □

例 6.11 SU(2) の表現 (T_l, V_l) の微分表現 (4.25) の行列を用いて SU(2) の 1 径数部分群

$$U_1(t) = \exp[tS_1'], \quad U_2(t) = \exp[tS_2'], \quad U_3(t) = \exp[tS_3']$$

をつくれば，左から U_1, U_2, U_3 の順に書いて

$$\begin{pmatrix} \cos\dfrac{t}{2} & \mathrm{i}\sin\dfrac{t}{2} \\ \mathrm{i}\sin\dfrac{t}{2} & \cos\dfrac{t}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\dfrac{t}{2} & \sin\dfrac{t}{2} \\ -\sin\dfrac{t}{2} & \cos\dfrac{t}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/2} \end{pmatrix} \tag{6.60}$$

を得る．したがって (6.26) により

$$T_l\Big(U_1(t)\Big)z^k = \left(\mathrm{i}z\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}\right)^{2l-k}\left(z\cos\frac{t}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{t}{2}\right)^k. \qquad (6.61)$$

これを t で微分して $t=0$ とおくことにより

$$\mathrm{d}T_l(S_1')z^k = \mathrm{i}\frac{k}{2}z^{k-1} + \mathrm{i}\left(l - \frac{k}{2}\right)z^{k+1}$$

が得られる．同様にして

$$\mathrm{d}T_l(S_2')z^k = \frac{k}{2}z^{k-1} - \left(l - \frac{k}{2}\right)z^{k+1}$$

$$\mathrm{d}T_l(S_3')z^k = -\mathrm{i}(l-k)z^k \qquad (k=0,1,\cdots,2l). \qquad (6.62)$$

□

この最後の式は，$\mathrm{i}\cdot\mathrm{d}T_l(S_3')$ の固有値が $l, l-1, \cdots, -l$ の $2l+1$ 個からなる (したがって，どれも重複度は 1) ことを示す．$\mathrm{i}\cdot\mathrm{d}T_l(S_3')$ の固有値は表現 T_l の**ウェイト** (weight) と呼ばれ，その最大値は**最高ウェイト** (highest weight) と呼ばれる．

なお，V_l の任意の元に対する $\mathrm{d}T_l(S_k')$ の作用は：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}T_l(S_1')f &= \mathrm{i}\left\{lz + \frac{1}{2}(1-z^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right\}f \\ \mathrm{d}T_l(S_2')f &= \left\{-lz + \frac{1}{2}(1+z^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right\}f \\ \mathrm{d}T_l(S_3')f &= -\mathrm{i}\left\{l - z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right\}f. \end{aligned} \qquad (6.63)$$

$\mathfrak{g}$ を線形 Lie 群 G の Lie 代数とする．上とは逆に，与えられた $\mathfrak{g}$ の表現 ρ に対して，それを微分表現とするような G の表現は存在するだろうか？ 定理 5.3 によれば：

定理 6.15 G を単連結な線形 Lie 群とし，$\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ の任意の表現 (ρ, V) に対して $\mathrm{d}T = \rho$ となるような G の表現 (T, V) がただ一つ存在する． □

$\mathfrak{g}$ の表現は，一般に複数個ある．そこで，$\mathfrak{g}$ の表現に同値性を定義し，それと親の G の表現の同値性との関係を調べよう．

定義 6.4 Lie 代数の二つの表現 $(\rho_1, \mathsf{V}), (\rho_2, \mathsf{V}_2)$ に対して，V_1 から V_2 への全単射線形写像 Λ で

$$\Lambda\rho_1(X) = \rho_2(X)\Lambda \qquad (X \in \mathfrak{g})$$

をみたすものが存在するとき，二つの表現は**同値** (equivalent) であるという. □

この同値関係で $\mathfrak{g}$ のすべての表現を類別したとき，各類を**表現類**という.

定理 6.16 G を線形 Lie 群，$\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とし，$(T_1, \mathsf{V}_1), (T_2, \mathsf{V}_2)$ を G の表現とする.

(i) (T_1, V_1) と (T_2, V_2) が同値なら $\mathrm{d}T_1$ と $\mathrm{d}T_2$ は同値である.

(ii) G が連結で，$\mathrm{d}T_1$ と $\mathrm{d}T_2$ が同値ならば，(T_1, V_1) と (T_2, V_2) は同値である.

［証明］ (i) 仮定により V_1 から V_2 への全単射線形写像 Λ で $\Lambda T_1(x) = T_2(x)\Lambda$ $(x \in \mathsf{G})$ をみたすものが存在する. $x = \exp[tX]$ を代入して (6.59) を用いれば

$$\Lambda \exp[t\mathrm{d}T_1(X)] = \exp[t\mathrm{d}T_2(X)]\Lambda$$

となるから，これを t で微分し $t = 0$ とおけば

$$\Lambda \mathrm{d}T_1(X) = \mathrm{d}T_2(X)\Lambda \qquad (X \in \mathfrak{g}). \tag{6.64}$$

(ii) 今度は V_1 から V_2 への全単射線形写像 Λ で (6.64) をみたすものが存在すると仮定する. $\mathrm{d}T_1(X) = \Lambda^{-1}\mathrm{d}T_2(X)\Lambda$ と書いて m 乗すれば

$$\Lambda[\mathrm{d}T_1(X)]^m = [\mathrm{d}T_2(X)]^m\Lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

となるので，指数関数の定義 (5.1) により $\Lambda \exp[\mathrm{d}T_1(X)] = \exp[\mathrm{d}T_2(X)]\Lambda$. したがって，(6.59) から

$$\Lambda T_1(\exp X) = T_2(\exp X)\Lambda \tag{6.65}$$

を得る. ところが，いま G は連結なので，その任意の元 x は，定理 5.11 により適当な $X_1, \cdots, X_r \in \mathfrak{g}$ を用いて

$$x = \exp X_1 \cdots \exp X_r$$

と表わせるから

$$\begin{aligned} T_1(x) &= T_1(\exp X_1) \cdots T_1(\exp X_r) \\ &= \Lambda^{-1}T_2(\exp X_1)\Lambda \cdots \Lambda^{-1}T_2(\exp X_r)\Lambda \\ &= \Lambda^{-1}T_2(x)\Lambda \end{aligned}$$

∎

次に，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 (ρ, V) が**既約** (irreducible) であるとは，V の線形部分空間 U で ρ 不変なものは $\{0\}$ と V との他にないことをいう. ただし，U が ρ

不変であるとは

$$\rho(X)\mathsf{U} \subset \mathsf{U} \qquad (X \in \mathfrak{g})$$

の成り立つことを意味する．つぎの定理は，すでに明らかであろう．

定理 6.17　線形 Lie 群 G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とし，G の表現を (T, V) とする．

(i) T 不変な V の線形部分空間は $\mathrm{d}T$ 不変である．したがって，$\mathrm{d}T$ が既約ならば T も既約である．

(ii) G が連結の場合，$\mathrm{d}T$ 不変な部分空間は T 不変である．したがって，G が連結な場合，T が既約ならば $\mathrm{d}T$ も既約である．　□

こうして，連結群の既約表現を求める問題は，その Lie 代数の既約表現を求める問題に帰着された．

半単純な Lie 代数[*4]については，どの表現も完全可約であることが知られている．Lie 代数の表現の完全可約性は，群の表現のそれと同様に定義される：

定義 6.5　(ρ, V) を Lie 代数の表現とする．V に ρ 不変な部分空間 $\mathsf{V}_1, \cdots, \mathsf{V}_r$ があって $\mathsf{V} = \mathsf{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{V}_r$ となり，かつ ρ のどの V_k 上の表現も既約なとき ρ は**完全可約**であるという．(ρ, V_k) を ρ の既約成分という．　□

§6.5　$\mathfrak{sl}(2, \mathsf{C})$ の表現

$\mathfrak{sl}(2, \mathsf{C})$ の既約表現をすべて求めよう．この代数の元は 2×2 の複素行列でトレースが 0 だから，基底として

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.66}$$

をとる．これらの交換関係は

$$[E, F] = H, \quad [H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F. \tag{6.67}$$

$\mathfrak{sl}(2, \mathsf{C})$ の有限次元表現を (ρ, V) とし，$A = \rho(E)$，$B = \rho(F)$，$C = \rho(H)$ とおく．これらが表現であることから $[C, A] = 2A$ が成り立つので

$$[C, A^n] = [C, A^{n-1}]A + A^{n-1}[C, A]$$

から $[C, A^n] = 2nA^n$ が得られる．同様にして

*4　後の定義 7.4 を見よ．

$$
\begin{aligned}
[C, A^n] &= 2nA^n \\
[C, B^n] &= -2nB^n \\
[A, B^n] &= nB^{n-1}\{C-(n-1)I\} \\
[B, A^n] &= -n\{C-(n-1)I\}A^{n-1}.
\end{aligned}
\tag{6.68}
$$

いま，C の固有値 λ の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とする．(6.68) の第 1 式から

$$C(A^n\boldsymbol{u}) = A^nC\boldsymbol{u} + 2nA^n\boldsymbol{u} = (\lambda+2n)(A^n\boldsymbol{u})$$

となるから，$A^n\boldsymbol{u} \neq 0$ は C の固有値 $\lambda+2n$ の固有ベクトルである．しかし，任意の n に対して $A^n\boldsymbol{u} \neq 0$ であったら固有ベクトルが無限個あることになり，V が有限次元であることに反する．ゆえに，ある自然数 p に対して

$$A^{p-1}\boldsymbol{u} \neq 0 \quad \text{かつ} \quad A^p\boldsymbol{u} = 0$$

となる．一般に，C の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ であって $A\boldsymbol{v} = 0$ になるものを V の**原始ベクトル** (primitive vector) という．それは必ず存在する．実際，上の $A^{p-1}\boldsymbol{u}$ はその例である．

定理 6.18 (ρ, V) を $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{C})$ の自明でない表現とし，V の原始ベクトルを $\boldsymbol{v}$，対応する固有値を λ として，$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し

$$\boldsymbol{u}_n = \frac{1}{n!}B^n\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{u}_{-1} = 0$$

とおけば

$$C\boldsymbol{u}_n = (\lambda-2n)\boldsymbol{u}_n, \quad B\boldsymbol{u}_n = (n+1)\boldsymbol{u}_{n+1}, \quad A\boldsymbol{u}_n = (\lambda-n+1)\boldsymbol{u}_{n-1}$$

が成り立つ． □

もし $\boldsymbol{u}_n \neq 0$ なら，それは C の固有ベクトルであるが，V が有限次元だから，$\boldsymbol{u}_m \neq 0$, $\boldsymbol{u}_{m+1} = 0$ であるような負でない整数 m が存在する．上の第 3 式で $n = m+1$ とおけば $\lambda = m$ が知れる．

C の固有値は，すべて整数である．なぜなら，C の任意の固有値を μ とすれば，対応する固有ベクトルから原始ベクトルを作ると $\lambda = \mu + 2n$ であり，これが整数 m に等しいから μ は整数である．そこで

定理 6.19 (ρ, V) を $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{C})$ の任意の既約表現とする．$m = \dim(\mathsf{V}) - 1$ とおけば V の基底 $(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)$ で次式をみたすものが存在する：

$$\rho(H)\boldsymbol{u}_n = (m-2n)\boldsymbol{u}_n \quad (n=0,1,\cdots,m)$$
$$\rho(F)\boldsymbol{u}_m = 0, \quad \rho(F)\boldsymbol{u}_n = (n+1)\boldsymbol{u}_{n+1} \quad (n=0,1,\cdots,m-1) \tag{6.69}$$
$$\rho(E)\boldsymbol{u}_0 = 0, \quad \rho(E)\boldsymbol{u}_n = (m-n+1)\boldsymbol{u}_{n-1} \quad (n=1,2,\cdots,m)$$

しかも，V の原始ベクトルはスカラー倍の違いを除いてただ一つ存在し，対応する $\rho(H)$ の固有値は m である．

逆に，m を任意の負でない整数とすれば，$m+1$ 次元の複素線形空間 V と V の基底 $(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)$ を設定して $\mathfrak{sl}(2, \mathrm{C})$ から $\mathfrak{gl}(\mathrm{V})$ への線形写像 ρ を上式によって定義すれば，(ρ, V) は $\mathfrak{sl}(2, \mathrm{C})$ の既約表現になる．

［証明］ **前半**　定理 6.18 で与えられるベクトル $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ は $\rho(H)$ の異なる固有値に属する固有ベクトルであるから，1 次独立である．これらの張る部分空間を U とすれば，定理 6.18 から U は ρ 不変である．よって，ρ が既約なら U = V でなければならず dim V$= m+1$ となる．したがって $\rho(H)$ の固有値に縮退はない．他方，V の原始ベクトルに対応する $\rho(H)$ の固有値は一意に定まって m であるから原始ベクトルも一意に定まる．

後半　ρ が定理の諸式をみたせば

$$[\rho(E), \rho(F)]\boldsymbol{u}_n = \{(m-n)(n+1) - n(m-n+1)\}\boldsymbol{u}_n$$
$$= (m-2n)\boldsymbol{u}_n = \rho(H)\boldsymbol{u}_n$$

などのように ρ は (6.67) をみたし，確かに $\mathfrak{sl}(2, \mathrm{C})$ の表現になっている．これが既約なことを示そう．U を V の ρ 不変な部分空間とする．その 0 でないベクトルの任意の一つ $\boldsymbol{v}$ を定理の基底で展開し，0 でない係数の最小の番号を k とする：

$$\boldsymbol{v} = a_k\boldsymbol{u}_k + \cdots + a_m\boldsymbol{u}_m.$$

これに $\rho(F)$ を繰り返しかけて $\boldsymbol{u}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ を追い出せば

$$\boldsymbol{u}_m = \frac{1}{m(m-1)\cdots(k+1)a_k}\rho(F)^{m-1}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} \in \mathrm{U}$$

次に，$\rho(E)$ をかけて番号を m から下げることを繰り返せば，基底ベクトルがすべて U に属することが分かり U = V．よって，ρ は既約である．　∎

この定理から，$\mathfrak{sl}(2,\mathrm{C})$ の同一次元の任意の二つの表現は同値であることが分かる．

§6.6 実 Lie 代数の複素化と複素表現

定義 5.3 で，Lie 代数 $\mathfrak{h}$ の線形空間としての係数体 K が R のとき実 Lie 代数とよぶことにした．応用上，その複素表現が必要になる．実数のペアから複素数をつくったように，Lie 代数も複素化しよう．その目標は

実 Lie 代数の複素表現類 $\longleftrightarrow$ (実 Lie 代数の複素化) の複素表現類

を示すことである．ここに $\longleftrightarrow$ は 1 対 1 対応を表わす．

(a) 複素化

定義 6.6 $\mathfrak{h}$ を実 Lie 代数とする．直積集合 $\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ は，その元 (X,Y) を $X+\mathrm{i}Y$ と書いて次の演算規則を導入すれば，複素 Lie 代数となる．これを実 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ の**複素化** (complexification) といい，$\mathfrak{h}^{\mathrm{c}}$ と記す：

$$
\begin{aligned}
&(X+\mathrm{i}Y)+(X'+\mathrm{i}Y')=(X+X')+\mathrm{i}(Y+Y')\\
&(a+\mathrm{i}b)(X+\mathrm{i}Y)=(aX-bY)+\mathrm{i}(aY+bX)\quad(a,\,b\in\mathsf{R}) \qquad (6.70)\\
&\Big[(X+\mathrm{i}Y),(X'+\mathrm{i}Y')\Big]=\Big([X,X']-[Y,Y']\Big)+\mathrm{i}\Big([X,Y']+[Y,X']\Big)
\end{aligned}
$$
□

複素化は係数体の拡大であって，$\mathfrak{h}$ の基底は，$\mathfrak{h}^{\mathrm{c}}$の基底となるから

$$\dim_{\mathsf{C}}(\mathfrak{h}^{\mathrm{c}})=\dim_{\mathsf{R}}\mathfrak{h} \qquad (6.71)$$

が成り立つ．

定義 6.7 $\mathfrak{h}$ を実 Lie 代数とし，$\mathfrak{g}$ を複素 Lie 代数とするとき，$\mathfrak{h}^{\mathrm{c}}$が $\mathfrak{g}$ と同形ならば $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の**実形** (real form) という． □

複素 Lie 代数は，いつも実形をもつとは限らない．また，もつときも一つとは限らない．二つ以上の実形があって，互いに同形でないこともある．

定義 6.8 $\mathfrak{g}$ を複素 Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ 自身への写像 φ は，次の条件をみたすとき**共役変換** (conjugation) という：$X,Y\in\mathfrak{g}$, $a\in\mathsf{C}$ として

$$
\begin{aligned}
&\varphi(X+Y)=\varphi(X)+\varphi(Y)\\
&\varphi(aX)=\bar{a}\varphi(X)\\
&\varphi([X,Y])=[\varphi(X),\varphi(Y)]\\
&\varphi(\varphi(X))=X
\end{aligned}
\qquad (6.72)
$$
□

例 6.12 $\mathfrak{h}$ を実 Lie 代数とする．$\mathfrak{h}^{\mathrm{c}}$の元 $X+\mathrm{i}Y$に元 $X-\mathrm{i}Y$を対応させる写像は共役変換である． □

例 6.13 $\mathfrak{gl}(n,\mathsf{C})$ または $\mathfrak{sl}(n,\mathsf{C})$ において次の三つの写像は共役変換である：

(i) $X \mapsto \bar{X}$,

(ii) $X \mapsto -X^{\dagger}$,

(iii) $X \mapsto -I_{p,q}X^{\dagger}I_{p,q} \qquad (p+q=n,\ p,q \geqq 1)$.

ただし，$I_{p,q}$は§4.1(b) で定義した． □

定理 6.20 $\mathfrak{g}$ を複素 Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ が共役変換φをもてば，その不動点の全体

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \varphi(X) = X\}$$

は $\mathfrak{g}$ の実形である．逆に，$\mathfrak{g}$ が実形をもてば，それは $\mathfrak{g}$ のある共役変換の不動点全体として得られる．

［証明］ 明らかに $\mathfrak{h}$ は実 Lie 代数をなすが

$$\gamma(X) = \left(\frac{1}{2}\{X+\varphi(X)\}, \frac{1}{2\mathrm{i}}\{X-\varphi(X)\}\right)$$

によって写像$\gamma: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}^{\mathrm{c}}$を定義すれば，これは同形写像になる．したがって，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の実形である．

逆をいうために，$\mathfrak{g}$ が実形 $\mathfrak{h}'$をもつとする．$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{h}'$への同形写像をτとし，$\mathfrak{h}'^{\mathrm{c}}$における例 6.12 の共役変換を$\varphi$とすれば，$\phi = \tau^{-1}\circ\varphi\circ\tau$ は $\mathfrak{g}$ における共役変換である．その不動点の全体を $\mathfrak{a}$ とおけば，任意の $Y \in \mathfrak{a}$ に対し [*5]

$$\tau(Y) = \tau\circ\Big(\tau^{-1}\circ\varphi\circ\tau(Y)\Big) = \varphi\Big(\tau(Y)\Big)$$

となるので，$\tau(Y)$ はφの不動点であり，したがって $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{h}'$に同形である． ∎

例 6.14 $\mathfrak{h}$ を実 Lie 代数とする．$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}^{\mathrm{c}}$の実形である． □

例 6.15 次の三つは，いずれも $\mathfrak{gl}(n,\mathsf{C})$ の実形である：

$$\mathfrak{gl}(n,\mathsf{R}), \quad \mathfrak{u}(n), \quad \mathfrak{u}(p,q) \quad (p+q=n,\ p,q \geqq 1)$$ □

例 6.16 次の三つは，いずれも $\mathfrak{sl}(n,\mathsf{C})$ の実形である：

$$\mathfrak{sl}(n,\mathsf{R}), \quad \mathfrak{su}(n), \quad \mathfrak{su}(p,q) \quad (p+q=n,\ p,q \geqq 1)$$ □

---

*5 $\tau\circ\varphi$ の $\circ$ は写像の合成を表わす．写像 τ と φ の合成である．

(b) 複素表現

定義 6.9 $\mathfrak{h}$ を実 Lie 代数とし，V を複素線形空間とする．$\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{gl}(\mathrm{V})$ への写像 σ は，次の 2 条件をみたすとき $\mathfrak{h}$ の**複素表現**とよばれる：

$$\begin{aligned} &\sigma(aX+bY)=a\sigma(X)+b\sigma(Y) \\ &\sigma([X,Y])=[\sigma(X),\sigma(Y)] \end{aligned} \qquad (a,b\in\mathrm{R},\ X,Y\in\mathfrak{h}) \tag{6.73}$$

□

実 Lie 代数の複素表現は

$$\sigma^{\mathrm{c}}(X+\mathrm{i}Y):=\sigma(X)+\mathrm{i}\sigma(Y) \tag{6.74}$$

によって $\mathfrak{h}$ の複素化 $\mathfrak{h}^{\mathrm{c}}$ の V 上の表現に**拡大**される．逆に，(ρ,V) を $\mathfrak{h}^{\mathrm{c}}$ の複素表現とし，ρ の定義域を $\mathfrak{h}$ に**制限**して σ とすれば，(σ,V) は $\mathfrak{h}$ の複素表現となり，それを拡大すればもとに戻る：$\sigma^{\mathrm{c}}=\rho$.

つまり，実 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ の複素表現と，$\mathfrak{h}$ の複素化の複素表現とは，その一方から他方が得られるという関係にある．しかも，それらは同値な表現を同一視すれば 1 対 1 である．すなわち

定理 6.21 $(\sigma_1,\mathrm{V}_1),(\sigma_2,\mathrm{V}_2)$ を実 Lie 代数の二つの複素表現とする．これらが同値であれば σ_1^{c} と σ_2^{c} も同値であり，逆も真である．

［証明］ σ_1 と σ_2 が同値ならば, V_1 から V_2 への全単射複素線形写像 Λ で $\Lambda\sigma_1=\sigma_2\Lambda$ をみたすものが存在する．それによって，任意の $X,Y\in\mathfrak{h}$ に対して

$$\Lambda\{\sigma_1(X)+\mathrm{i}\sigma_1(Y)\}=\{\sigma_2(X)+\mathrm{i}\sigma_2(Y)\}\Lambda$$

となるから $\Lambda\sigma_1^{\mathrm{c}}(X+\mathrm{i}Y)=\sigma_2^{\mathrm{c}}(X+\mathrm{i}Y)\Lambda$ が成り立つ．逆は，明らか． ∎

こうして対応する表現 σ と σ^{c} は既約性，完全可約性においても同じである．すなわち

定理 6.22 (σ,V) を実 Lie 代数の複素表現とすれば，V の部分空間 U につき：

$$\begin{aligned} &\sigma\text{不変} \iff \sigma^{\mathrm{c}}\text{不変} \\ &\sigma\text{が既約} \iff \sigma^{\mathrm{c}}\text{が既約} \\ &\sigma\text{が完全可約} \iff \sigma^{\mathrm{c}}\text{が完全可約} \end{aligned}$$

［証明］ 明らか． ∎

例 6.17 例 6.16 により $\mathfrak{su}(2)$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathrm{C})$ の実形である．$\mathfrak{sl}(2,\mathrm{C})$ の表現から $\mathfrak{su}(2)$ のそれを導こう．

m を任意の負でない整数とし，V をたかだか m 次の複素係数多項式の全体がつくる線形空間とする．そこに

$$\boldsymbol{u}_n = \frac{z^n}{(m-n)!n!} \qquad (n = 0, 1, \cdots, m) \tag{6.75}$$

からなる基底を入れ，(6.69) により線形写像 $\rho_m(H), \rho_m(F), \rho_m(E)$ を定義すれば，$\{(\rho_m, \mathsf{V}_m)\}$ は $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{C})$ の既約表現の完全系をなす．

$\mathfrak{sl}(2, \mathsf{C})$ の基底 (6.66) と $\mathfrak{su}(2)$ の基底 (4.25) は

$$S_1' = \frac{\mathrm{i}}{2}(F+E), \quad S_2' = \frac{1}{2}(F-E), \quad S_3' = \frac{\mathrm{i}}{2}H \tag{6.76}$$

の関係にあるから

$$\rho_m(S_1')\boldsymbol{u}_k = \rho\left(\frac{\mathrm{i}}{2}(F+E)\right)\boldsymbol{v}_k = \frac{\mathrm{i}}{2}\Big(\rho(F)+\rho(E)\Big)\boldsymbol{u}_k$$

などが得られる．(6.75) を代入して，$n = m-k$ とおけば

$$\begin{aligned} \rho_m(S_1')z^k &= \frac{\mathrm{i}}{2}kz^{k-1} + \frac{\mathrm{i}}{2}(m-k)z^{k+1} \\ \rho_m(S_2')z^k &= \frac{1}{2}kz^{k-1} - \frac{1}{2}(m-k)z^{k+1} \qquad (k = 0, 1, \cdots, m) \\ \rho_m(S_3')z^k &= \frac{\mathrm{i}}{2}(2k-m)z^k \end{aligned} \tag{6.77}$$

を得る．ただし，$k = 0, m$ のとき z^{k-1}, z^{k+1} は，それぞれ 0 とおく．

$$\Big\{(\rho_m|_{\mathfrak{su}(2)}, \mathsf{V}_m) : m = 0, 1, 2, \cdots\Big\}$$

は $\mathfrak{su}(2)$ の既約表現の完全系をなす．$m = 2l$ のとき，これは例 6.11 でつくった SU(2) の微分表現に一致する． □

演習問題

6.1 次の形の行列全体がつくる線形 Lie 群 G を Heisenberg 群という．

$$g(a, k, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & a & \alpha \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (a, \alpha, k \in \mathsf{R})$$

(i) この群の積の規則 $g(a',k',\alpha')g(a,k,\alpha)=g(a'+a,k'+k,\alpha'+\alpha+ka')$ を確かめよ.

(ii) R 上の無限回微分可能な関数の空間 $\mathsf{C}^\infty(\mathsf{R})$ の上に定義された

$$\Big(S(g)\psi\Big)(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\psi(x-a)\qquad(\psi\in\mathsf{C}^\infty(\mathsf{R}),\ x\in\mathsf{R})$$

が G の表現$\Big(S,\mathsf{C}^\infty(\mathsf{R})\Big)$を与えることを示せ. これを Schrödinger 表現という.

(iii) 行列

$$X_a=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad X_k=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad X_\alpha=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

は G の Lie 代数の基底をなす. これを確かめよ.

(iv) Schrödinger 表現の微分表現 $\mathrm{d}S$は次のようになる. これを確かめよ.

$$(\mathrm{d}S)(X_a)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},\quad(\mathrm{d}S)(X_k)=-\mathrm{i}x,\quad(\mathrm{d}S)(X_\alpha)=\mathrm{i}.$$

これらの交換関係が X_a,X_k,X_αの交換関係と一致することを確かめよ.

6.2 R^3上の無限回可微分関数の全体を $\mathsf{C}^\infty(\mathsf{R}^3)$ で表わす. 各 $g\in\mathrm{SO}(3)$ に対して

$$\Big(T(g)\psi\Big)(\boldsymbol{r}):=\psi(g^{-1}\boldsymbol{r})\qquad\Big(\psi\in\mathsf{C}^\infty(\mathsf{R}^3),\ \boldsymbol{r}=(x,y,z)^{\mathrm{t}}\Big)$$

によって定義した T は $\mathsf{C}^\infty(\mathsf{R}^3)$ 上の SO(3) の表現となる. 実際,

$$\Big(T(h)T(g)\psi\Big)(\boldsymbol{r})=\psi\Big(g^{-1}(h^{-1}\boldsymbol{r})\Big)$$

は $\psi([hg]^{-1}\boldsymbol{r})=\Big(T(hg)\psi\Big)(\boldsymbol{r})$ に等しい.
この表現の微分表現は, $X\in\mathfrak{so}(3)$ に対して

$$\Big([\mathrm{d}T(X)]\psi\Big)(\boldsymbol{r})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi\left(\mathrm{e}^{-tX}\boldsymbol{r}\right)\Big|_{t=0}$$

で定義される.

(i) X を (5.19), (5.20) の L_1',L_2',L_3'にとると

$$\mathrm{d}T(L_1')=x_2\frac{\partial}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial}{\partial x_2},\quad\mathrm{d}T(L_2')=x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$\mathrm{d}T(L_3')=x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}$$

となることを示せ．これらは量子力学における角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{L}} = (L_1', L_2', L_3')$ と $\hat{L}_1 = -\mathrm{i}\hbar \mathrm{d}T(L_1')$ 等々の関係にある．

(ii) $\mathrm{d}T(L_k')$ が L_k' と同じ交換関係

$$[\mathrm{d}T(L_1'), \mathrm{d}T(L_2')] = -\mathrm{d}T(L_3'), \quad [\mathrm{d}T(L_2'), \mathrm{d}T(L_3')] = -\mathrm{d}T(L_1'),$$
$$[\mathrm{d}T(L_3'), \mathrm{d}T(L_1')] = -\mathrm{d}T(L_2')$$

をもつことを確かめよ．

6.3 前問の L_1', L_2', L_3' から

$$E = -\mathrm{i}L_1' + L_2', \quad F = -\mathrm{i}L_1' - L_2', \quad H = -2\mathrm{i}L_3'$$

を定義する．

(i) これらが $\mathfrak{sl}(2,\mathrm{C})$ の交換関係 (6.67) をみたすことを示せ．これは $\mathfrak{so}(3)^{\mathrm{c}} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathrm{C})$ を意味する．

(ii) 前問の $\mathrm{d}T$ を，ここでは ρ と書く．$\rho(E) := -\mathrm{i}\rho(L_1') + \rho(L_2')$ などとすれば，これらも $\mathfrak{sl}(2,\mathrm{C})$ の交換関係をみたすことを確かめよ．

(iii) $\mathfrak{sl}(2,\mathrm{C})$ の交換関係を $\rho(H)\rho(E) = \rho(E)[\rho(H) + 2]$ と書き，これを用いて u が $\rho(H)$ の固有ベクトル u なら $\rho(E)u$ は固有値が2だけ上がった固有ベクトルになることを示せ．同様に，$\rho(F)$ は $\rho(H)$ の固有値を2だけ下げることを示せ．これらは $\rho(H)$ の固有値の上げ・下げ演算子 (step-up, step-down operators) なのである．

(iv) (x_1, x_2, x_3) の複素係数 l 次同次式で Laplace の方程式 (6.45) をみたすものの全体を H_l とする．$\rho(L_k')$ は H_l を不変にすること $(\rho(L_1')\mathsf{H}_l \subset \mathsf{H}_l)$ を確かめよ．

(v) $\xi = x_1 + \mathrm{i}x_2$ とおき，次式を導け：

$$\rho(E) = 2x_3 \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} - \xi \frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad \rho(F) = -2x_3 \frac{\partial}{\partial \xi} + \bar{\xi} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

(vi) ρ を H_l に制限したとき，原始ベクトルは $\mathcal{Y}_{l,l} = \xi^l$ であること，すなわち

$$\rho(E)\mathcal{Y}_{l,l} = 0, \quad \rho(H)\mathcal{Y}_{l,l} = 2l\mathcal{Y}_{l,l}$$

となることを示せ．H_l に，これ以外の原始ベクトルはあるか?

(vii) $\mathcal{Y}_{l,m} := \rho(F)^{l-m}\mathcal{Y}_{l,l}$ として，次式を証明せよ：

$$\rho(H)\mathcal{Y}_{l,m} = 2m\mathcal{Y}_{l,m}, \quad \rho(F)\mathcal{Y}_{l,m} = \mathcal{Y}_{l,m-1}$$
$$\rho(E)\mathcal{Y}_{l,m} = (l-m)(l+m+1)\mathcal{Y}_{l,m+1} \qquad (-l \leqq m \leqq l)$$

［ヒント：$\rho(E)\rho(F)^k = \rho(H)\rho(F)^{k-1} + \rho(F)\rho(E)\rho(F)^{k-1}$ を用いる.］

(viii) 前問 (vii) の式は，$Y_{l,m}$の定義を

$$\mathcal{Y}_{l,m} = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}}\rho(F)^{l-m}\mathcal{Y}_{l,l}$$

に変えたら，どうなるか．

(ix) $\psi \in \mathsf{H}_l$から $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$の l 乗をくくりだして

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = r^l \psi(n_1, n_2, n_3) \quad \left(n_k := \frac{x_k}{r},\ k = 1, 2, 3\right)$$

と書こう．$\boldsymbol{n} = (x_1/r, x_2/r, x_3/r)$ は$\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$ の方向を表わす単位ベクトル．

$$\rho(L_1')\psi(x_1, x_2, x_3) = -r^l\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi(n_1, n_2, n_3)$$

となることを確かめよ．ただし，$\boldsymbol{n}$の方向を極座標系で (θ, φ) とした．

(x) H_lは，そのすべての関数の定義域を単位球面 S^2に制限した H_l'と同形である．

$$\mathcal{Y}_{l,m}(x_1, x_2, x_3) = r^l Y_{l,m}(n_1, n_2, n_3)$$

とし，(ix) によって H_l上の表現 ρ を H_l'上の σ に移せば，σ と $Y_{l,m}$に対して (vii), (viii) と同じ形の式が成り立つことを確かめよ．R^3の調和関数を単位球面上に制限した $Y_{l,m}$は球面調和関数とよばれる (§6.3)．これは，H_lを単位球面上に制限した H_l'を表現空間とする SO(3) の既約表現 (次の問題) の基底である．

6.4 §6.3 で構成した SO(3) の表現 D_l'の既約性を次の筋道で証明せよ．

(i) $C_l(g) = D_l' \circ \mathrm{Ad}(g)$ ($g \in \mathrm{SU}(2)$) は SU(2) の H_l上の表現になることを確かめる．

(ii) $C_l(\exp tS_3')\psi(\boldsymbol{r})$ を $\psi = (x + \mathrm{i}y)^l$ に対して計算し，C_lのウェイトが l を含むことを示す．

(iii) SU(2) の既約表現の完全系 $\{(\rho^{(l')}, \mathsf{V}_{l'}\}$ は定理 6.8 に得られている．C_lが既約でなく，それらの直和に分解されるなら，すなわち

$$(C_l, \mathsf{H}_l) = \sum_{l' \in \Lambda}(\rho^{(l')}, \mathsf{V}_{l'})$$

となるなら，ウェイトを比べて，(ii) から l'のどれかは $l \leqq l'$でなければならない．他方，C_lの表現空間 H_lの次元 $2l+1$ は $2l'+1$ の Λ にわたる和に等しいから $l \geqq l'$ でもある．よって，Λ は $l' = l$ の 1 元集合である．ゆえに，$(C_l, \mathsf{H}_l) \cong (\rho^{(l)}, \mathsf{H}_l)$.

(iv) $C_l = D_l' \circ \mathrm{Ad}$, $\rho^{(l)} = D^{(l)} \circ \mathrm{Ad}$ だから，(iii) により $D_l' \cong D^{(l)}$.

6.5 単位球面 S^2 上の連続関数 f の積分

$$I[f] = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta f(\theta, \varphi)$$

は SO(3) 不変なこと，すなわち $I[{}_a f] = I[f_a] = I[f]$ $(\forall a \in \mathrm{SO}(3))$ を証明せよ．これを用いて $Y_{l,m}$ を規格化せよ (適当な正の数をかけて絶対値の 2 乗の積分が 1 になるようにする)．

6.6 $\mathsf{C}^\infty(\mathsf{R}^3)$ を定義域とする微分演算子

$$\rho(L'^2) := -\left\{\rho(L_1')^2 + \rho(L_2')^2 + \rho(L_3')^2\right\}$$

について，次のことを証明せよ．

(i) $\rho(L'^2)$ は，どの $\rho(L_k')$ とも可換である．

(ii) $\rho(L'^2)\psi = l(l+1)\psi$ $(\psi \in \mathsf{H}_l)$ が成り立つ．

(iii) R^3 の極座標 (r, θ, φ) で単位球面上の位置を表わせば

$$\rho(L'^2) = -\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$

6.7 n 次の上三角行列

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \qquad (x_{ij} \in \mathsf{R})$$

の全体がつくる群 $T(n, \mathsf{R})$ における左不変積分は

$$I_L[f] = \int_{T(n,\mathsf{R})} f(x) \frac{\mathrm{d}x_{11}\mathrm{d}x_{12}\cdots\mathrm{d}x_{1n}\mathrm{d}x_{22}\cdots\mathrm{d}x_{2n}\cdots\mathrm{d}x_{nn}}{|x_{11}^n x_{22}^{n-1}\cdots x_{nn}|}$$

で与えられることを確かめよ．右不変積分はどうなるか?

6.8 コンパクト群 G のすべての既約ユニタリ表現類の集合を G の**双対** (dual) といい，$\hat{\mathsf{G}}$ と記す．$\hat{\mathsf{G}}$ の各元 λ から一つずつ行列表現 U_λ をとり，各々の次数を $d(\lambda)$ とする．このとき，G 上の可積分関数 $f \in \mathsf{L}(\mathsf{G})$ の Fourier 変換を，Haar 測度 μ を用いて

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathsf{G}} f(x) U_\lambda(x^{-1}) \mathrm{d}\mu(x) \qquad (\lambda \in \hat{\mathsf{G}})$$

と定義する．

(i) 定円周上の並進群の場合に，この Fourier 変換を具体的に書き下せ．

(ii) $\mathsf{L}^2(\mathsf{G})$ の元 f に対して，展開式

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \hat{\mathsf{G}}} d(\lambda) \mathrm{tr}[\hat{f}(\lambda) U_\lambda(x)]$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，収束は $\mathsf{L}^2(\mathsf{G})$ のノルムによる．

(iii) 定円周上の並進群の場合に (ii) を確かめよ．

6.9 SO(3) は，パラメタ空間が 2 重連結であり (演習問題 3.12)，また単連結の SU(2) によって 2 重に覆われる (普遍被覆)．この二つの事実は関連しているのだろうか？ $\mathrm{U}(1) = \{e^{i\varphi} : 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\}$ のパラメタ空間は何重連結か？ 単連結な実軸 R によって何重に覆われるか？

第7章

ルートとウェイト

Lie 代数にイデアルを定義し，これによって半単純，単純 Lie 代数の概念を立て，前者が後者の直和で表わされることを示す．次に，ルートとウェイトの概念を導入して，いわゆる複素単純 Lie 代数を分類し，それぞれの型について既約表現を構成する．

§7.1 Lie 代数のイデアル

定義 7.1 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は，その任意の 2 元が可換のとき**可換** (abelian) であるという． □

定理 7.1 G を線形 Lie 群，$\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とする．

(i) G が可換ならば，$\mathfrak{g}$ も可換である．

(ii) G が連結で，$\mathfrak{g}$ が可換ならば，G も可換である．

［証明］ (ii) の証明には，G が連結だから定理 5.11 が使える． ∎

定義 7.2 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の線形部分空間 $\mathfrak{k}$ [*1] は，条件

$$X, Y \in \mathfrak{k} \implies [X, Y] \in \mathfrak{k}$$

をみたすとき $\mathfrak{g}$ の**部分代数** (subalgebra) とよばれる． □

つまり，$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$ の場合である．これに対して，

定義 7.3 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の線形部分空間 $\mathfrak{h}$ は，条件

$$X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h} \implies [X, Y] \in \mathfrak{h}$$

*1 $\mathfrak{k}$ はドイツ文字の k.

をみたすとき $\mathfrak{g}$ のイデアル (ideal) とよばれる． □

$[X,Y]=-[Y,X]$ なので，Lie 代数には左イデアルと右イデアルの区別はない．

例 7.1 $\mathfrak{sl}(n,\mathsf{K})$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathsf{K})$ のイデアルである． □

イデアルは部分代数であるが，逆は必ずしも真でない．

イデアルは，明らかに正規部分群につながっている．

定理 7.2 H を線形 Lie 群 G の閉部分群とし，$\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{g}$ をそれぞれ H と G の Lie 代数とすれば次の (i), (ii) が成り立つ (証明は演習問題 7.1)．

(i) H が G の正規部分群ならば，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(ii) H も G も連結で $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルならば，H は G の正規部分群である．□

$\mathfrak{a}$ を Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のイデアルとし，$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ を線形空間としての商空間としよう．ここに交換子積が定義できる．すなわち，$\overline{X},\overline{Y}\in\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の交換子積とは，$\overline{X},\overline{Y}$ からそれぞれとった代表元 X_1,Y_1 の交換子積 $[X_1,Y_1]$ を含む剰余類をいう．これは，代表元の選び方によらないだけでなく，交換子積に対する Lie の 3 条件 (定義 5.3 の上を見よ) をみたす．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}'$ への準同形写像 ρ の核 $\mathrm{Ker}(\rho)=\{X\in\mathfrak{g}:\rho(X)=0\}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

定理 7.3 (Lie 代数に関する準同形定理) $\mathfrak{g}$ および $\mathfrak{g}'$ を Lie 代数とし，ρ を $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}'$ の上への準同形写像とすれば

$$\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}(\rho)\cong\mathfrak{g}'.$$

［証明］ $\overline{X}\in\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の代表元 X_1 をとり $\varphi(\overline{X})=\rho(X_1)$ とすれば，これは代表元の選び方によらず，写像 $\varphi:\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}(\rho)\longrightarrow\mathfrak{g}'$ を定める．そして同形写像になる． ∎

$\mathfrak{g}_1,\cdots,\mathfrak{g}_n$ を n 個の Lie 代数とする．線形空間としての直和 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_n$ をつくり，交換子積

$$[(X_1,\cdots,X_n),(Y_1,\cdots,Y_n)]=([X_1,Y_1],\cdots,[X_n,Y_n])$$

を導入すれば，$\mathfrak{g}$ は Lie 代数となる．これを Lie 代数の**直和** (direct sum) という．次に

$$\mathfrak{a}_i=\{(0,\cdots,X_i,\cdots,0):X_i\in\mathfrak{g}_i\}$$

とおけば，各 $\mathfrak{a}_i$ は $\mathfrak{g}_i$ に同形で，かつ $\mathfrak{g}$ のイデアルになる．その上

$$A_i\in\mathfrak{a}_i,\ A_j\in\mathfrak{a}_j\ (i\neq j)\quad\Longrightarrow\quad[A_i,A_j]=0$$

が成り立つ．これは Lie 代数の直和を特徴づける性質である．

例 7.2 $\mathfrak{o}(4)\cong\mathfrak{o}(3)\oplus\mathfrak{o}(3)$

$$A_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},\quad A_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},$$

$$A_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$B_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad B_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$B_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

の都合 6 個は $\mathfrak{o}(4)$ の基底をなし (付録 A.1 の表を参照)，交換関係

$$[A_i,A_j]=\varepsilon_{ijk}A_k,\quad [A_i,B_j]=0,\quad [B_i,B_j]=\varepsilon_{ijk}B_k$$

に従う．ここに

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & (ijk)\text{ が }(123)\text{ の偶置換のとき}\\ -1 & (ijk)\text{ が }(123)\text{ の奇置換のとき}\\ 0 & \text{その他のとき}\end{cases}$$

いま，A_1,A_2,A_3の張る部分空間を $\mathfrak{a}$ とし，B_1,B_2,B_3の張る部分空間を $\mathfrak{b}$ とすれば

$$\mathfrak{o}(4)\cong\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b},\quad \mathfrak{a}\cong\mathfrak{b}\cong\mathfrak{o}(3).$$

□

§7.2 半単純 Lie 代数

定義 7.4 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は，可換でなく，$\{0\}$ と $\mathfrak{g}$ 自身のほかにイデアルをもたないとき**単純** (simple) であるといい，$\{0\}$ 以外に可換なイデアルをもたないとき**半単純** (semisimple) であるという． □

明らかに単純 Lie 代数は半単純である．半単純 Lie 代数は単純とは限らないが，単純 Lie 代数の直和で表わされることを後に示す．

例 7.3 $\mathfrak{sl}(2,\mathsf{C})$ は単純である．実際，$\mathfrak{sl}(2,\mathsf{C})$ の 0 でない任意のイデアルを $\mathfrak{a}$ とし，その 0 でない任意の元を基底 (6.66) により $X = aE + bF + cH$ と書く．(6.67) から

$$[E,[E,X]] = -2bE \in \mathfrak{a}, \quad [F,[F,X]] = -2aF \in \mathfrak{a}$$

が得られ，$a \neq 0$ なら $F \in \mathfrak{a}$，したがって $[F,X] = -2aH + 2cF$ で $H \in \mathfrak{a}$，さらに $[H,X] = 2aE - 2bF$ から $E \in \mathfrak{a}$ となり $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathsf{C})$ 全体に一致する．

$b \neq 0$ の場合も，$a = b = 0,\ c \neq 0$ の場合も同様． □

一般に $\mathfrak{sl}(n,\mathsf{K})$ は単純なことが知られている．$\mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{o}(n,\mathsf{C})$ $(n = 3,5,6,\cdots)$ および $\mathfrak{sp}(2m,\mathsf{K})$ も単純である．$\mathfrak{o}(4)$, $\mathfrak{o}(4,\mathsf{C})$ は単純でない．実際，$\mathfrak{o}(4,\mathsf{C}) \cong \mathfrak{o}(3,\mathsf{C}) \oplus \mathfrak{o}(3,\mathsf{C})$，また例 7.2 も参照．

Lie 代数の半単純性は次に定義する Killing 形式を用いて判定される．

定義 7.5 $\mathfrak{g}$ を K 上の Lie 代数とするとき

$$B(X,Y) := \mathrm{tr}\Big(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)\Big) \qquad (X,Y \in \mathfrak{g})$$

を $\mathfrak{g}$ の **Killing 形式** (Killing form) という． □

$X,Y,Z \in \mathfrak{g}$ に対して，明らかに

$$B(X,Y) = B(Y,X), \tag{7.1}$$

$$B([X,Y],Z) = B(X,[Y,Z]). \tag{7.2}$$

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式は $\mathfrak{g}$ の構造定数 (定義 5.4) で表わせる．実際 $\mathfrak{g}$ の基底 $(E_1,\cdots,E_n)$ を用いて[*2]

---

*2　一つの項の中で二度くりかえす添字については 1 から n までの和をとる (Einstein の規約)．混乱のおそれがないときは，これに従う．

$$X = x^i E_i, \quad Y = y^j E_j, \quad A = a^k E_k \tag{7.3}$$

と表わせば，$\mathfrak{g}$ の構造定数を $\{c_{ij}{}^k\}$ として

$$\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)A = [X,[Y,A]] = x^i y^j a^k c_{il}{}^m c_{jk}{}^l E_m$$

を得る．これが $\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)$ の $\mathfrak{g}$ に引き起こす線形変換である．その変換行列を同じ記号で表わす約束だから

$$\Big(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)\Big)_{mk} = x^i y^j c_{il}{}^m c_{jk}{}^l. \tag{7.4}$$

したがって，Killing 形式は

$$B(X,Y) = x^i g_{ij} y^j \tag{7.5}$$

と書かれる．ここに計量 (metric) として現われた

$$g_{ij} := B(E_i, E_j) = c_{il}{}^m c_{jm}{}^l \tag{7.6}$$

を **Cartan 計量**という．明らかに

$$g_{ij} = g_{ji}. \tag{7.7}$$

例 7.4 $\mathfrak{sl}(2,\mathrm{C})$ の Cartan 計量．例 7.3 で用いた基底を $E_1 = E$, $E_2 = F$, $E_3 = H$ とすれば，構造定数は

$$c_{12}{}^3 = 1, \quad c_{13}{}^1 = -2, \quad c_{23}{}^2 = 2, \quad c_{21}{}^3 = -1, \quad c_{31}{}^1 = 2, \quad c_{32}{}^2 = -2,$$
他は 0

となる．公式 (7.6) による $g_{12} = c_{12}{}^3 c_{23}{}^2 + c_{13}{}^1 c_{21}{}^3$ などの計算から

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

□

次のように計算する手もある．

例 7.5 基底 E, F, H を用いて $\mathfrak{sl}(2,\mathrm{C})$ の元を $X = aE + bF + cH$ と書けば

$$\mathrm{ad}(X)E = [X,E] = -bH + 2cE, \quad \mathrm{ad}(X)F = aH - 2cF,$$
$$\mathrm{ad}(X)H = -2aE + 2bF$$

となる．線形変換 ad を $\mathrm{ad}(X)E_j = E_k \alpha_{kj}$ によって行列 (α_{kj}) で表わす：

$$\mathrm{ad}(aE + bF + cH) = (\alpha_{ki}) = \begin{pmatrix} 2c & 0 & -2a \\ 0 & -2c & 2b \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{ad}(X)$ と $\mathrm{ad}(Y)$ の積の行列は，各因子の行列の積になるから (演習問題 7.2)

$$\mathrm{ad}(aE+bF+cH)\mathrm{ad}(a'E+b'F+c'H)$$
$$=\begin{pmatrix} 4cc'+2ab' & -2aa' & -4ca' \\ -2bb' & 4cc'+2ba' & -4cb' \\ -2bc' & -2ac' & 2ba'+2ba' \end{pmatrix}.$$

トレースをとれば Killing 形式 $B(X,Y)$ が得られる：

$$\mathrm{tr}\Big(\mathrm{ad}(aE+bF+cH)\mathrm{ad}(a'E+b'F+c'H)\Big)=(a\ b\ c)\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.$$

□

一般に，Killing 形式は，また次のようにしても求められる．すなわち

$$B(X,Y)=\frac{1}{2}\Big\{B(X+Y,X+Y)-B(X,X)-B(Y,Y)\Big\}$$

に注意して

$$\Big\{\mathrm{ad}(X)\Big\}^2 Z=[X,[X,Z]]=X^2Z-2XZX+ZX^2$$

から，次の三つの型の線形変換のトレースを計算すればよい：

$$Z\mapsto X^2Z,\quad Z\mapsto XZX,\quad Z\mapsto ZX^2.$$

例 7.6 $\mathfrak{gl}(n,\mathsf{K})$ の Killing 形式．(i,j) 要素が 1，他の要素はすべて 0 の行列を E_{ij} とすれば，$\{E_{ij}:i,j=1,\cdots,n\}$ の n^2 個が $\mathfrak{gl}(n,\mathsf{K})$ の基底をなし，$E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}$．いま，$Z=E_{ij}$ にとれば

$$X^2E_{ij}=\sum_{l=1}^{n}(X^2)_{li}E_{lj},\quad XE_{ij}X=\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}x_{li}x_{jm}E_{lm},$$
$$E_{ij}X^2=\sum_{l=1}^{n}(X^2)_{jl}E_{il}$$

となる．第 1 の線形変換の対角要素は，展開 $\sum_{l=1}^{n}(X^2)_{li}E_{lj}$ のうち，E_{ij} の係数 $(X^2)_{ii}$ であるから，トレースは和 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X^2)_{ii}$ になる．第 2，第 3 の線形変換についても同様で，それぞれのトレースは

$$n\,\mathrm{tr}(X^2), \quad (\mathrm{tr}\,X)^2, \quad n\,\mathrm{tr}(X^2)$$

となる．こうして

$$B(X,X) = 2n\,\mathrm{tr}(X^2) - 2(\mathrm{tr}\,X)^2 \tag{7.8}$$

が得られ，したがって

$$B(X,Y) = 2n\,\mathrm{tr}(XY) - 2\mathrm{tr}\,X \cdot \mathrm{tr}\,Y \qquad \Big(X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathsf{K})\Big) \tag{7.9}$$

が求める Killing 形式である． □

例 7.7 $\mathfrak{sl}(n,\mathsf{K})$ の Killing 形式．一般に，$\mathfrak{a}$ が Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のイデアルなら $\mathfrak{a}$ の Killing 形式は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式の定義域を $\mathfrak{a}$ に制限したものに等しい．$\mathfrak{sl}(n,\mathsf{K})$ は前の例の $\mathfrak{gl}(n,\mathsf{K})$ のイデアルだから，(7.9) をトレースが 0 の X, Y に制限した

$$B(X,Y) = 2n\,\mathrm{tr}(XY) \qquad \Big(X, Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathsf{K})\Big) \tag{7.10}$$

が求めるものである． □

R 上の線形空間 V の線形変換 A は

$$A(\boldsymbol{u} + \mathrm{i}\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u} + \mathrm{i}A\boldsymbol{v} \qquad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathsf{V}) \tag{7.11}$$

によって C 上の線形空間 V^{c} に拡張される．これを A の複素化といって A^{c} と書く[*3]．このとき

$$\mathrm{tr}(A^{\mathrm{c}}) = \mathrm{tr}(A), \quad (AB)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}}B^{\mathrm{c}}. \tag{7.12}$$

また，実代数の複素化の意味から

$$\mathrm{ad}(X + \mathrm{i}Y) = \Big(\mathrm{ad}(X)\Big)^{\mathrm{c}} + \mathrm{i}\Big(\mathrm{ad}(Y)\Big)^{\mathrm{c}} \qquad (X, Y \in \mathfrak{h}) \tag{7.13}$$

となるので，$\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}^{\mathrm{c}}$ の Killing 形式をそれぞれ B, B' とすれば

$$\begin{aligned} &B'(X + \mathrm{i}Y, U + \mathrm{i}V) \\ &= B(X,U) - B(Y,V) + \mathrm{i}\Big\{B(X,V) + B(Y,U)\Big\} \qquad (7.14) \\ &(X, Y, U, V \in \mathfrak{h}). \end{aligned}$$

次の二つは半単純 Lie 代数の基本定理である．

定理 7.4 (Cartan の判定条件)

---

*3 添字 c は補集合を表わすためにも用いるが，本書では集合は S のような字体で書くので混乱のおそれはない．

$$\text{Lie 代数 } \mathfrak{g} \text{ が半単純} \quad \Longleftrightarrow \quad \det g \neq 0.$$

ここに，g は $\mathfrak{g}$ の Cartan 計量である．いいかえれば，$\mathfrak{g}$ が半単純であるための必要十分条件は，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式が非退化なことである．

［証明］ $\mathfrak{g}$ は半単純でなければ，可換なイデアル $\mathfrak{a}$ をもつ．その基底を $(E_1, \cdots, E_r)$ とし，これに $(E_{r+1}, \cdots, E_n)$ を補って $\mathfrak{g}$ の基底とする．いま，Cartan 計量 (7.6) の $1 \leqq j \leqq r$ の要素を見よう．E_j はイデアルの基底だから $1 \leqq l \leqq r$ でないと ${c_{jm}}^l = 0$．この範囲の l に対しては，同じ理由から $1 \leqq m \leqq r$ でなければ ${c_{il}}^m = 0$．他方，m がこの範囲にあれば，いまイデアル $\mathfrak{a}$ は可換なので ${c_{jm}}^l = 0$．こうして

$$g_{ij} = 0 \qquad (1 \leqq j \leqq r). \tag{7.15}$$

よって $\det g = 0$ となり $\Leftarrow$ が示された．$\Rightarrow$ については [18], [23]を見よ． ∎

定理 7.5 (Weyl の定理) 半単純 Lie 代数のどの表現も完全可約である．

［証明］ 文献 [23] を見よ． ∎

$\mathfrak{h}$ を実 Lie 代数とする．$\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^c$ の Killing 形式をそれぞれ B, B' とすれば，B' の $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ への制限は B に一致し，$\mathfrak{h}$ の基底はそのまま $\mathfrak{h}^c$ の基底になる．よって

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} \text{ が半単純} &\Longleftrightarrow \det\Big(B(E_i, E_j)\Big) \neq 0 \Longleftrightarrow \det\Big(B'(E_i, E_j)\Big) \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{h}^c \text{ が半単純}. \end{aligned} \tag{7.16}$$

定理 7.5 により半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の随伴表現 ad は完全可約であるから，表現空間としての $\mathfrak{g}$ は部分空間 $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_r$ の直和に分解され，それぞれは

$$\text{ad 不変}: [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j] = \delta_{ij} \mathfrak{a}_i \quad (i \text{ について和をとらない}) \tag{7.17}$$

であり，かつ既約である (すなわち，より小さな部分空間で (7.17) の性質をもつものはない)．

(7.17) は各 $\mathfrak{a}_i$ がイデアルであることを示す．$\mathfrak{g}$ は半単純で $\{0\}$ 以外に可換なイデアルをもたないので，どの $\mathfrak{a}_i$ も可換でない．さらに，$\mathfrak{a}_i$ は既約だから自身と $\{0\}$ 以外にイデアルをもたない．すなわち，$\mathfrak{a}_i$ は単純である．そこで

定理 7.6 (半単純 Lie 代数の構造定理) 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は，

(i) Lie 代数として有限個の単純イデアル $\mathfrak{a}_i$ の直和

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_s$$

に (順序は別として) 一意的に分解される．

(ii) $\mathfrak{g}$ のどの単純イデアルもどれかの $\mathfrak{a}_i$ に一致する．

［証明］ (i) は上に示した．(ii) の証明：$\mathfrak{g}$ の任意の単純イデアルを $\mathfrak{a}$ とすれば $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$ は $\mathfrak{a}$ の $\{0\}$ でないイデアルであるから $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$．他方，$\mathfrak{a}$ は単純なので，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$ からある i で $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_i]$ となり，$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_i$．ところが $\mathfrak{a}_i$ は単純だから $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_i$. これから分解の一意性も得られる． ∎

§7.3 Cartan 部分代数とルート

V を K 上の線形空間とし，A をその線形変換とする．A が**半単純**であるとは，K = C のときには A が対角化可能なことをいう．K が R のときには C に広げて (複素化して) 考える．

(a) Cartan 部分代数

定義 7.6 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分代数 $\mathfrak{h}$ は，次の 2 条件をみたすとき Cartan 部分代数という．

(i) $\mathfrak{h}$ は**極大可換部分代数** (maximal abelian subalgebra) である (すなわち：$\mathfrak{h}$ は可換で，$\mathfrak{h}$ を真部分集合とする $\mathfrak{g}$ の可換部分代数は存在しない)．

(ii) $\mathfrak{h}$ の任意の元 H に対し線形変換 $\mathrm{ad}(H)$ は半単純である． □

$\mathfrak{g}$ に Cartan 部分代数が存在すること，もし二つ存在しても，それらの次元は互いに等しいことが知られている．この次元を $\mathfrak{g}$ の**階数** (rank) という．

例 7.8 K の元を要素とする n 次の対角行列の全体を $\mathfrak{d}(n, \mathsf{K})$ とする．$\mathfrak{h} = \mathfrak{d}(n, \mathsf{K}) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathsf{K})$ は $\mathfrak{sl}(n, \mathsf{K})$ の Cartan 部分代数である．したがって，$\mathfrak{sl}(n, \mathsf{K})$ の階数は $n-1$ である．実際，定義の (i) は容易に検証される．(ii) を見るには，$n \times n$ 行列で (i, j) 要素のみ 1，他は 0 のものを E_{ij} とすれば，$\mathfrak{h}$ の任意の元 $H = \sum_{i=1}^{n-1} c^i (E_{ii} - E_{nn})$ の $\mathrm{ad}(H)$ は，$\mathfrak{g}$ の基底 $\{E_{ij}\ (i \neq j),\ E_{ii} - E_{nn}\}$ に

$$\mathrm{ad}(H)E_{ij} = (c_i - c_j)E_{ij}, \quad \mathrm{ad}(H)(E_{ii} - E_{nn}) = 0$$

のように作用し，いずれも線形変換としてすでに対角的である． □

定理 7.7 $\mathfrak{g}$ を実 Lie 代数とし，その部分代数を $\mathfrak{h}$ とすれば

$$\mathfrak{h}\ \text{は}\ \mathfrak{g}\ \text{の Cartan 部分代数} \iff \mathfrak{h}^{\mathrm{c}}\ \text{は}\ \mathfrak{g}^{\mathrm{c}}\ \text{の Cartan 部分代数}$$

［証明］ 定義 7.6 に照らして同等性を検証する．その (i) について検証は容易

である．

(ii) について：まず，"$\Longrightarrow$" を証明しよう．$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数とする．$\mathfrak{g}^{\mathrm{c}}$の随伴表現を σ とすれば

$$\sigma(X+\mathrm{i}Y) = \left(\mathrm{ad}(X)\right)^{\mathrm{c}} + \mathrm{i}\left(\mathrm{ad}(Y)\right)^{\mathrm{c}}$$

であり，Jacobi の恒等式から

$$\left[\left(\mathrm{ad}(X)\right)^{\mathrm{c}}, \left(\mathrm{ad}(Y)\right)^{\mathrm{c}}\right] = \left(\mathrm{ad}([X,Y])\right)^{\mathrm{c}} \qquad (X, Y \in \mathfrak{g}) \tag{7.18}$$

が成り立つ．ところが Cartan 部分代数は可換だから，$\left(\mathrm{ad}(X)\right)^{\mathrm{c}}, \left(\mathrm{ad}(Y)\right)^{\mathrm{c}}$ も可換であり，同時対角化可能ゆえ $\sigma(X+\mathrm{i}Y)$ も対角化可能である．逆 "$\Longleftarrow$" は自明． ∎

この定理から，複素半単純 Lie 代数とその実形の階数は等しいことが知られる．

例 7.9 $\mathfrak{d}(n,\mathsf{C}) \cap \mathfrak{sl}(n)$ は $\mathfrak{sl}(n)$ の Cartan 部分代数であり，その階数は $n-1$ である． □

定義 7.7 K 上の半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数を $\mathfrak{h}$ とする．$\mathfrak{h}$ の任意の元 H に対して $\mathrm{ad}(H)$ の固有多項式の根がすべて K に属する (したがって $\mathrm{ad}(H)$ は対角化可能) とき，$\mathfrak{g}$ は**分離的** (split) であるといい，$\mathfrak{h}$ を分離的 Cartan 部分代数という． □

明らかに，複素半単純 Lie 代数は分離的である．$\mathfrak{sl}(n,\mathsf{R})$ も $\mathfrak{sp}(2n,\mathsf{R})$ も分離的である．

(b) ルート

$\mathfrak{g}$ を階数 r の分離的半単純 Lie 代数とし，その分離的 Cartan 部分代数を $\mathfrak{h}$ とする．すべての $\mathrm{ad}(H)$ $(H \in \mathfrak{h})$ は n $(= \deg \mathfrak{g})$ 次元空間における互いに可換かつ対角化可能な線形変換だから，その基底を $(H_1, \cdots, H_r)$ とすれば，$(\mathrm{ad}(H_1), \cdots, \mathrm{ad}(H_r))$ は同時に対角化できる：

$$\mathrm{ad}(H_i)X = m_i X \qquad (m_i \in \mathsf{K},\ i = 1, \cdots, r) \tag{7.19}$$

そこで $(H_1, \cdots, H_r)$ に双対な $\mathfrak{h}^*$の基底 $(\mu_1, \cdots, \mu_r)$ を用いて[*4]

---

*4 μ_i は $\{H_j\}$ の張る線形空間 $\mathfrak{h}$ の上で定義された線形関数で $\mu_i(xH_j) = x\delta_{ij}$となる $(i=1,\cdots,r)$．(7.21) は，$H = H_i$とすれば (7.19) に帰着し，一般に $H = \sum x^j H_j$としても成り立つ．

$$\alpha(H) = \sum_{i=1}^{r} m_i \mu_i(H) \tag{7.20}$$

とおけば，α は基底のとりかたによらない $\mathfrak{h}^*$ の元で

$$\mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X \qquad (H \in \mathfrak{h}) \tag{7.21}$$

が成り立つ．固有ベクトルは一般に n 本あり，α はたかだか n 個である．そこで

定義 7.8 分離的 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ の双対空間 $\mathfrak{h}^*$ の元 α に対して

$$\mathfrak{g}_\alpha(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X,\ \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

が $\{0\}$ でないなら，α を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関する**ルート** (root) という．$\mathfrak{g}_\alpha$ は α に属する**ルート空間** (root space) とよぶ．特に，$\mathfrak{g}_0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ であり，この 0 を**零ルート** (zero root) という．$\mathfrak{h}$ が了解されているとき $\mathfrak{g}_\alpha(\mathfrak{h})$ を $\mathfrak{g}_\alpha$ とも書く． □

いま，$X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ と $H \in \mathfrak{h}$ をとり，Jacobi の恒等式を用いれば

$$[H,[X,Y]] = -[X,[Y,H]] - [Y,[H,X]] = [X,[H,Y]] + [[H,X],Y]$$

から

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \qquad (\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*) \tag{7.22}$$

が得られる．

$\mathfrak{g}$ は有限次元だから，そのルートの個数も有限であって，$\mathfrak{g}$ はルート空間の直和に分解される．こうして

定理 7.8 (半単純 Lie 代数のルート空間の分解) $\mathfrak{g}$ を分離的半単純 Lie 代数とし，その分離的 Cartan 部分代数を $\mathfrak{h}$ とする．$\mathfrak{h}$ に関する 0 でないルートの全体を Δ とすれば，これは有限集合であって

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \Big(\sum_{\alpha \in \Delta} \oplus\, \mathfrak{g}_\alpha \Big)$$

が成り立つ．Δ を $\mathfrak{h}$ に関する**ルート系** (root system) という． □

例 7.10 Lie 代数 $\mathfrak{so}(3)$ を C 上で考える．これは単純であるから半単純でもある．その交換関係 (5.21) から，$L_k = -\mathrm{i}L'_k$ とおいて

$$[L_3, L_1+\mathrm{i}L_2] = (L_1+\mathrm{i}L_2), \quad [L_3, L_1-\mathrm{i}L_2] = -(L_1-\mathrm{i}L_2),$$
$$[L_3, L_3] = 0$$

を得る．いま，分離的 Cartan 部分代数として $\mathfrak{h} = \mathrm{C}L_3$ をとり，その任意の元 $cL_3 (c \in \mathrm{C})$ に c を対応させる写像を μ とすればルート系 Δ は $\alpha = \mu$ と β

$=-\mu$ からなる．ルート空間の分解は

$$\mathfrak{so}(3)=\mathsf{C}L_3\oplus\mathsf{C}(L_1+\mathrm{i}L_2)\oplus\mathsf{C}(L_1-\mathrm{i}L_2) \tag{7.23}$$

となる． □

例 7.11 $\mathfrak{h}=\mathfrak{d}(r+1,\mathsf{K})\cap\mathfrak{sl}(r+1,\mathsf{K})$ が $\mathfrak{sl}(r+1,\mathsf{C})$ の分離的部分代数であった (例 7.9)．$\mathfrak{h}$ の任意の元

$$H=\begin{pmatrix} c_1 & & & 0 \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_{r+1}\end{pmatrix} \qquad (c_1+c_2+\cdots+c_{r+1}=0)$$

に c_iを対応させる写像を λ_i $(i=1,\cdots,r)$ とすれば，これは $\mathfrak{h}^*$の元で

$$H=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(H)(E_{ii}-E_{r+1,r+1}) \tag{7.24}$$

となる．したがって，$\mathfrak{sl}(r+1,\mathsf{K})$ の階数は r である．交換関係 $[E_{ij},E_{kl}]=\delta_{jk}E_{il}-\delta_{li}E_{kj}$を用いれば

$$\mathrm{ad}(H)E_{kl}=(\lambda_k-\lambda_l)(H)E_{kl} \qquad (k,l=1,\cdots,r+1) \tag{7.25}$$

が得られる．ゆえに，$r(r+1)$ 個の $\lambda_k-\lambda_l$ $(k\neq l)$ が 0 でないルートであって，ルート空間の分解は

$$\mathfrak{sl}(r+1,\mathsf{K})=\mathfrak{h}\oplus\left(\sum_{k\neq l}\oplus\mathsf{K}E_{kl}\right).$$ □

γを任意のルートとし，(7.22) をくりかえし使えば

$$\Big\{\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)\Big\}^n\mathfrak{g}_\gamma\subset\mathfrak{g}_{\gamma+n(\alpha+\beta)} \qquad (X\in\mathfrak{g}_\alpha,\ Y\in\mathfrak{g}_\beta;\ \alpha+\beta\neq 0)$$

を得る．ところがルートの個数は有限なので $\gamma+n(\alpha+\beta)$ がルートでないような自然数 n が存在する．その最小値を m_γとし，$m=\min_\gamma m_\gamma$とおけば $\Big\{\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)\Big\}^m\mathfrak{g}_\gamma=0$．ゆえに，定理 7.8 より

$$\Big\{\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)\Big\}^m\mathfrak{g}=0 \quad \text{すなわち} \quad \Big\{\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)\Big\}^m=0$$

となり，$\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)$ はベキ零であることが知れる[*5]．

---

*5 Aがベキ零 (nilpotent) であるとは，ある自然数 m に対して $A^m=0$ となることをいう．このような A は，相似変換で三角行列にすると対角線上に 0 ばかりが並ぶ．

ベキ零行列のトレースは 0 だから $B(X,Y)=0$. この Killing 形式を内積と見て

$$\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta \qquad (\alpha+\beta\neq 0). \tag{7.26}$$

このことから B を Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ に制限した $B_{\mathfrak{h}}$ も非退化なことがわかる. 実際, $H\in\mathfrak{h}$ に対して $B(H,H')=0$ $(\forall H'\in\mathfrak{h})$ だったら $H\perp\mathfrak{g}_0$ となるが, $H\in\mathfrak{g}_0$ だから (7.26) により $H\perp\mathfrak{g}_\alpha$ $(\forall\alpha\in\Delta)$ でもあり, 定理 7.8 により $H=0$.

$B_{\mathfrak{h}}$ は非退化だから, 与えられた $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対して

$$B_{\mathfrak{h}}(X,H)=\lambda(X) \qquad (\forall X\in\mathfrak{h}) \tag{7.27}$$

となる $H\in\mathfrak{h}$ がただ一つ存在する. これを H_λ と記そう. $\lambda\mapsto H_\lambda$ は $\mathfrak{h}^*$ から $\mathfrak{h}$ への全単射線形の写像である. これによって $\mathfrak{h}^*$ に内積

$$(\lambda,\mu)=B(H_\lambda,H_\mu) \tag{7.28}$$

を導入する. $(\cdot,\cdot)$ は非退化な双 1 次形式であって, $(\lambda,\mu)=\lambda(H_\mu)=\mu(H_\lambda)$ となる. なお, 内積の定義を (7.28) から任意の正数倍に変えても図 7.5 以前の命題は変わらない.

以上からルートの重要な性質が得られる.

定理 7.9 $\alpha\in\Delta$ とすれば

(i) $-\alpha\in\Delta$

(ii) $\pm2\alpha,\pm3\alpha,\cdots$ はどれもルートでない

(iii) $\dim(\mathfrak{g}_\alpha)=1$

(iv) $X\in\mathfrak{g}_\alpha$, $Y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ に対して $[X,Y]=B(X,Y)H_\alpha$

(v) $(\alpha,\alpha)\neq0$

[証明] (i) $-\alpha$ がルートでないとしたら, (7.26) により $\mathfrak{g}_\alpha$ は任意のルート β の $\mathfrak{g}_\beta$ と直交し, 定理 7.8 により $\mathfrak{g}_\alpha\perp\mathfrak{g}$ となるから, $\mathfrak{g}_\alpha=\{0\}$ がでて矛盾. (ii), (iii) は演習問題 7.4 を参照. (iv), (v) については文献 [23] を見よ. ∎

$\alpha\in\Delta$ とする. どの $X\in\mathfrak{g}_\alpha$ も $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ と直交しない. もし直交したら, X はどの $\mathfrak{g}_\beta$ $(\beta\in\Delta\cup\{0\})$ とも直交することになり, $X=0$. よって, $\exists Y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}:B(X,Y)\neq0$. そこで, $\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}$ それぞれの元 E_α, $E_{-\alpha}$ を $B(E_\alpha,E_{-\alpha})=2/(\alpha,\alpha)$ が成り立つように選び,

$$\overline{H}_\alpha := \frac{2H_\alpha}{(\alpha,\alpha)} \tag{7.29}$$

とおく．ただし，H_αは(7.27)の下で定義した．ルートの定義7.8から$[H_\alpha, E_\alpha] = \alpha(H_\alpha)E_\alpha$となり，また$\alpha(H_\alpha) = (\alpha,\alpha)$であることと，定理7.9の(iv)より

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \overline{H}_\alpha, \quad [\overline{H}_\alpha, E_\alpha] = 2E_\alpha, \quad [\overline{H}_\alpha, E_{-\alpha}] = -2E_{-\alpha} \tag{7.30}$$

が得られる．これは$\mathfrak{sl}(2,\mathsf{K})$の基底(6.66)の交換関係と同じである．その上，$\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = \dim(\mathfrak{g}_{-\alpha}) = 1$であるから

定理 7.10 $\alpha \in \Delta$に対して，

$$\mathfrak{a} := \mathsf{K}\overline{H}_\alpha + \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

は$\mathfrak{g}$の部分代数で，$\mathfrak{sl}(2,\mathsf{K})$に同形である． □

ここで定義した$(\overline{H}_\alpha, E_\alpha, E_{-\alpha})$を$\mathfrak{a}$の**標準基底** (canonical basis) という．

§7.4 ルート系

定理7.8, 7.10により，分離的半単純Lie代数$\mathfrak{g}$の構造はその(分離的Cartan部分代数$\mathfrak{h}$に関する)ルート系Δで決定される．これからは，$\mathfrak{h}$を固定しておく．

定理 7.11 Δは$\mathfrak{h}^*$を張る．したがって，$\mathfrak{g}$の階数rに等しい個数の1次独立なルートが存在する．

［証明］ Δが$\mathfrak{h}^*$を張らないなら，$\mathfrak{h}$の0でない元Hで$\alpha(H) = 0$ $(\forall\alpha \in \mathfrak{h}^*)$となるものが存在し，ルート空間の定義より$[\mathfrak{g}_\alpha, H] = 0$ $(\forall\alpha \in \Delta)$となる．他方，Cartan部分代数は可換だから$[\mathfrak{h}, H] = 0$．ゆえに定理7.8より$H = 0$となって矛盾にいたる． ▮

ルート系の次の性質は基本的である．

定理 7.12 αをΔの任意の元とし，βを任意のルートとする．

(i) $\beta + m\alpha$がルートであるような整数mの最大値をp，最小値を$-q$とすれば，

$$\beta - q\alpha,\ \beta - (q-1)\alpha,\ \cdots,\ \beta,\ \beta+\alpha,\ \cdots,\ \beta+p\alpha \tag{7.31}$$

は，すべてルートとなる．これをβを含むルートのα**系列** (α-series) という．ここに

$$q - p = \langle \beta, \alpha \rangle \qquad \left(\langle \beta, \alpha \rangle := \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \right) \tag{7.32}$$

(ii) $\beta+\alpha$がルートならば，$\mathfrak{g}_\alpha$の任意の0でない元Xに対して$\mathrm{ad}(X)\mathfrak{g}_\beta \neq \{0\}$が成り立つ．

［証明］ (i) $\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}$から，それぞれ0でない$E_\alpha, E_{-\alpha}$を選べば，(7.30)により$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \kappa H_\alpha$が成り立つ（$\kappa$は定数）．他方，

$$\mathsf{V} := \sum_{m=-q}^{p} \mathfrak{g}_{\beta+m\alpha}$$

は$\mathrm{ad}(E_\alpha)$および$\mathrm{ad}(E_{-\alpha})$に関して不変$\left(\mathrm{ad}(E_{\pm\alpha})\mathsf{V} \subset \mathsf{V}\right)$であって，

$$0 = \mathrm{tr}\left\{[\mathrm{ad}(E_\alpha), \mathrm{ad}(E_{-\alpha})] \Big|_{\mathsf{V}}\right\} = \kappa\, \mathrm{tr}\left\{\mathrm{ad}(H_\alpha) \Big|_{\mathsf{V}}\right\}$$

となるから，最右辺を計算すれば

$$0 = \sum_{m=-q}^{p} (\beta + m\alpha)(H_\alpha) = (p+q+1)(\beta, \alpha) + \frac{1}{2}(p-q)(p+q+1)(\alpha, \alpha)$$

が得られる．これは(7.32)にほかならない．

いま，$-q \leqq l$のある整数に対し$\beta + l\alpha$がルートでないとしてみよう．もし$0 < l < p$なら$\mathsf{V}' = \sum_{m=-q}^{l-1} \mathfrak{g}_{\beta+m\alpha}$に対して上と同じ考察をすれば，(7.32)で定義した$\langle \cdot, \cdot \rangle$を用いて

$$\langle \beta, \alpha \rangle = q - (l-1)$$

が得られるので，$l = p+1$でなければならず，$l \geqq p$に矛盾する．

(ii) $X \in \mathfrak{g}_\alpha$に対し，$\mathrm{ad}(X)\mathfrak{g}_\beta = \{0\}$だったとする．この仮定から，$\mathsf{U} = \sum_{m=-q}^{0} \mathfrak{g}_{\beta+m\alpha}$が$\mathrm{ad}(E_\alpha), \mathrm{ad}(E_{-\alpha})$に関して不変となるので，(i)と同じ考察から$p = 0$がでる．これは，$\beta+\alpha$がルートで$p \geqq 1$であることに矛盾する． ∎

この定理の(ii)と定理7.9の(iii)から，(7.22)が等式になる：$\alpha+\beta \in \Delta$なら

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}. \tag{7.33}$$

ルート系の特徴づけとして，さらに

定理 7.13 ルート系ΔがR上に張る線形空間Eは，(7.28)によって内積$(\cdot, \cdot)$を導入すればr次元実 Euclid 空間となる（rは$\mathfrak{g}$の階数）．そして

(i) $\alpha, \beta \in \Delta \quad \Longrightarrow \quad \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha \in \Delta$

(ii) $\alpha, \beta \in \Delta \quad \Longrightarrow \quad \langle \beta, \alpha \rangle =$ 整数

(iii) $\alpha \in \Delta,\ c = 実数 \neq \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad c\alpha \notin \Delta$

r は，またルート系 Δ の**階数** (rank) ともいう．

［証明］ (i),(ii) 定理 7.12 の (i) からわかる．零ルートにはならない．(iii) は，(ii) の $2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha)$ および α,β を入れ換えた $2(\alpha,\beta)/(\beta,\beta)$ が $\beta = c\alpha$ のとき $2c, 2/c$ となり，いずれも整数であることから $c = \pm 1/2, \pm 1, \pm 2$ でなければならない．しかし，$c = \pm 1$ 以外は定理 7.9 の (ii) に反する． ∎

この定理の (i) は，Euclid 空間 E のベクトル α, β が Δ に属すれば，β から α 方向の成分の 2 倍を引いても Δ に属することを意味する．すなわち，α に垂直な平面に関する β の鏡映 $S_\alpha(\beta)$ がまた Δ に属するというのである (図 7.1)．

一般に，κ に垂直な平面に関する**鏡映** (reflection) を

$$S_\kappa(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \kappa \rangle \kappa \qquad (\kappa, \lambda \in \mathsf{E}) \tag{7.34}$$

によって定義しよう．ここに $\langle \lambda, \kappa \rangle$ は (7.32) に定義されている．すると

$$S_\alpha は直交変換, \quad (S_\alpha)^2 = I, \quad \det(S_\alpha) = -1. \tag{7.35}$$

もちろん，$S_\kappa(\kappa) = -\kappa$ であり，S_κ は κ に垂直な超平面に属するベクトルを動かさない．これら二つの性質を鏡映 S_κ の定義とすることもできる．

$\{S_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ によって生成される GL(E) の部分群を **Weyl 群** W(Δ) という．定理 7.13 の (i) はルート系 Δ はその Weyl 群で不変なことを意味している：

$$S_\alpha(\beta) \in \Delta \qquad (\alpha, \beta \in \Delta) \tag{7.36}$$

いま $\|\alpha\| := (\alpha,\alpha)^{1/2}$ として，ベクトルのなす角 θ を $(\beta,\alpha) := \|\alpha\|\,\|\beta\| \cos\theta$ で定義すれば，定理 7.13 の (ii) は

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2\,\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos\theta \tag{7.37}$$

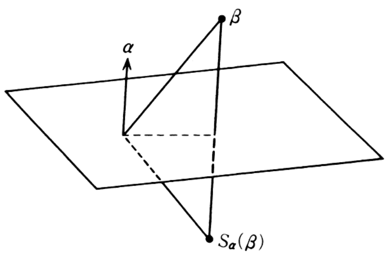


図 7.1

が整数であることを示す．α, β を入れ換えて掛ければ $4\cos^2\theta$ も整数で 0,1,2,3,4 に限られることが分かる．よって

定理 7.14 0 でないルートのペア α, β ($\|\alpha\| \geqq \|\beta\|$) の型は，表 7.1 の九つに限られる． □

例 7.12 表 7.1 から，階数 r が 1 および 2 のルート系を求めることができる．

階数 1：型は一つ．$\mathfrak{so}(3)$(例 7.10) は，この場合に属する (図 7.2)．

階数 2：型は四つ (図 7.3)． □

定義 7.9 ルート系 Δ の部分集合 Π は，次の 2 条件をみたすとき Δ の**基本系** (fundamental system) とよばれる．基本系の元を，**単純ルート** (simple root) という．

(i) Π の元は互いに 1 次独立である．

(ii) Δ のどの元も Π の元の整数係数の線形結合で表わされる．その係数は，すべて負でないか，すべて正でないかのいずれかである． □

図 7.3 の場合，α, β が基本系である．基本系は，かならず存在する．そして，ルート系を生成する．展開係数がすべて負でないルートを (Π に関して) 正のルートといい，その全体を $\Delta^+(\Pi)$ と記す．$\Delta^-(\Pi)$ も同様に定義される．明らかに，

$$\Delta = \Delta^+(\Pi) + \Delta^-(\Pi), \quad \Delta^-(\Pi) = -\Delta^+(\Pi), \quad \Pi \subset \Delta^+(\Pi) \qquad (7.38)$$

例 7.13 $\mathfrak{sl}(r+1, \mathrm{K})$ のルートの基本系：例 7.11 の記号で $\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ ($1 \leqq i \leqq l$) が基本系である． □

表 7.1 ルートのペアの型

場合	$\langle\alpha, \beta\rangle$	$\langle\beta, \alpha\rangle$	θ	$\|\beta\| / \|\alpha\|$	$S_\alpha S_\beta$の位数
1	0	0	90°	不定	2
2	1	1	60°	1	3
3	−1	−1	120°	1	3
4	1	2	45°	$\sqrt{2}$	4
5	−1	−2	135°	$\sqrt{2}$	4
6	1	3	30°	$\sqrt{3}$	6
7	−1	−3	150°	$\sqrt{3}$	6
8	2	2	0°	1 ($\beta = \alpha$)	1
9	−2	−2	180°	1 ($\beta = -\alpha$)	1

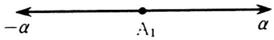


図 7.2 ルート図，A_1型．

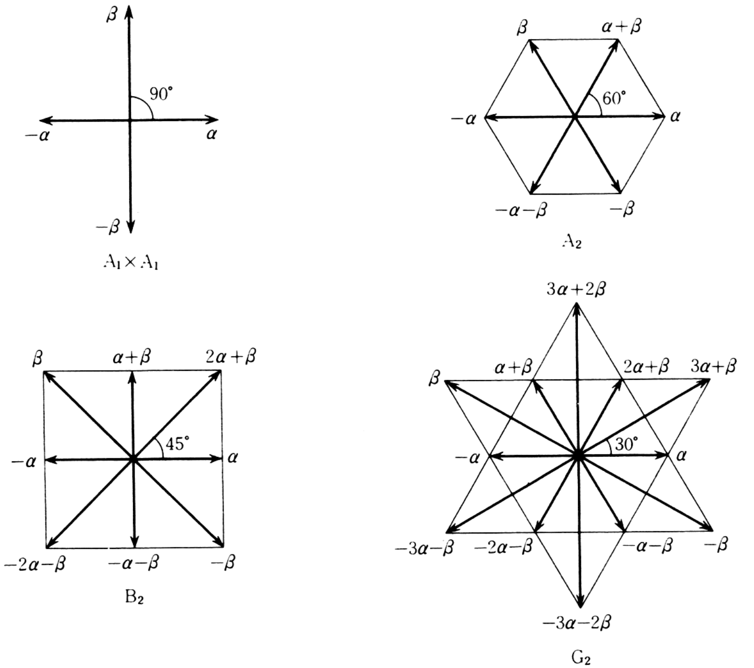


図 7.3 ルート図，階数2の場合．

Weyl群 $W(\Delta)$ は $\{S_\alpha : \alpha \in \Pi\}$ で生成されることが知られている．

例 7.14 階数2のルート系の Weyl群 (表 7.2). □

ルート系 Δ の基本系 Π は次の性質をもつ．

定理 7.15

(i) $\alpha, \beta \in \Pi \Longrightarrow \alpha - \beta \notin \Delta$

(ii) $\alpha, \beta \in \Delta,\ \alpha \neq \beta \Longrightarrow (\alpha, \beta) \leqq 0$, i.e. 異なる単純ルートは鈍角をなす．

［証明］ (i) 係数に正と負が混在．(ii) $(\alpha, \beta) > 0$ だったら定理7.14より $\langle \alpha, \beta \rangle$ または $\langle \beta, \alpha \rangle$ が1に等しく，定理7.13により $\alpha - \beta \in \Delta$ となり，矛盾． ∎

表 7.2

型	Weyl 群の元	備考
A_2	$I, S_\alpha, S_\beta, S_\alpha S_\beta, S_\beta S_\alpha, S_\alpha S_\beta S_\alpha$	$S_\beta S_\alpha S_\beta = S_\alpha S_\beta S_\alpha$
B_2	$I, S_\alpha, S_\beta, S_\alpha S_\beta, S_\beta S_\alpha, S_\alpha S_\beta S_\alpha, S_\beta S_\alpha S_\beta,$ $(S_\alpha S_\beta)^2$	$(S_\beta S_\alpha)^2 = (S_\alpha S_\beta)^2 = -I$
G_2	$I, S_\alpha, S_\beta, S_\alpha S_\beta, S_\beta S_\alpha, S_\alpha S_\beta S_\alpha,$ $S_\beta S_\alpha S_\beta, (S_\alpha S_\beta)^2, (S_\beta S_\alpha)^2, S_\beta(S_\alpha S_\beta)^2,$ $S_\alpha(S_\beta S_\alpha)^2, (S_\alpha S_\beta)^3$	$(S_\beta S_\alpha)^3 = (S_\alpha S_\beta)^3 = -I$

定義 7.10 Δ を階数 r のルート系とする．その基本系 Π のすべての元を順序づけた列 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ に対して $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ を要素とする $r \times r$ 行列を Δ の **Cartan 行列**という． □

Cartan 行列はルートの基本系を完全に記述する．その対角要素は定義からすべて 2 に等しく，非対角要素は，定理 7.14, 7.15 により $0, -1, -2, -3$ のいずれかである．

例 7.15 (階数 2 のルート系の Cartan 行列) 定理 7.14 の表 7.1 と例 7.12 のルート図から：

$$A_1 \times A_1 : \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B_2 : \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G_2 : \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

§7.5 複素単純 Lie 代数の分類

Lie 代数の単純性はルート系を用いて判定される．

定義 7.11 ルート系は，互いに直交する二つの空でない部分集合に分けられないとき，**既約** (irreducible) であるという． □

例 7.16 例 7.12 のルート系のうち，階数 1 のものは既約，階数 2 では A_2, B_2, G_2 が既約，$A_1 \times A_1$ は既約でない． □

定理 7.16 複素半単純 Lie 代数において，単純 $\Longleftrightarrow$ ルート系が既約． □

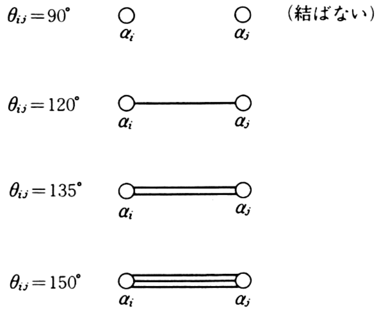


図 7.4

この基本定理によって，複素単純 Lie 代数の分類は既約ルート系の分類に帰着される．それに用いる Dynkin 図形について説明しよう．

ルート系 Δ の基本系を $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ としよう．各 α_i を平面上の小さな円で表わし，その上に内積 (α_i, α_i) を重みとして書き添える．そして円 α_i, α_j を両者のなす角 θ_{ij} に応じて図 7.4 のように多重線で結ぶのである．こうして **Dynkin 図形**(Dynkin diagram)ができあがる．基本系の選び方を変えても，この図形は変わらない——個々の円の名前は別として．Dynkin 図形から Cartan 行列もルートの基本系も復元される．

基本系 Π の既約性をルート系 Δ のそれと同様に定義すれば，両者の既約性は同等になる．よって

$$\text{ルート系 } \Delta \text{ が既約} \iff \text{基本系 } \Pi \text{ の Dynkin 図形が連結} \tag{7.39}$$

こうして，複素単純 Lie 代数をすべて求めることは，連結な Dynkin 図形をすべて求める問題になる．次の定理がその答である．ただし，α_i の一つを単位ベクトルとした．こうしても一般性は失われない．(7.28) の下の注意を参照．

定理 7.17 (Dynkin の定理) 既約ルート系の Dynkin 図形は図 7.5 の 9 種に限る． □

この構成のもとになったルート系 Δ は Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ に依存するから，Dynkin 図形も $\mathfrak{h}$ に依存するが，本質的な違いにはならない．そこで，Dynkin 図形と，それに対応する複素単純 Lie 代数を図 7.5 に記した同じ名前 $\mathrm{A}_r, \cdots, \mathrm{G}_2$ で呼ぶことにしよう．

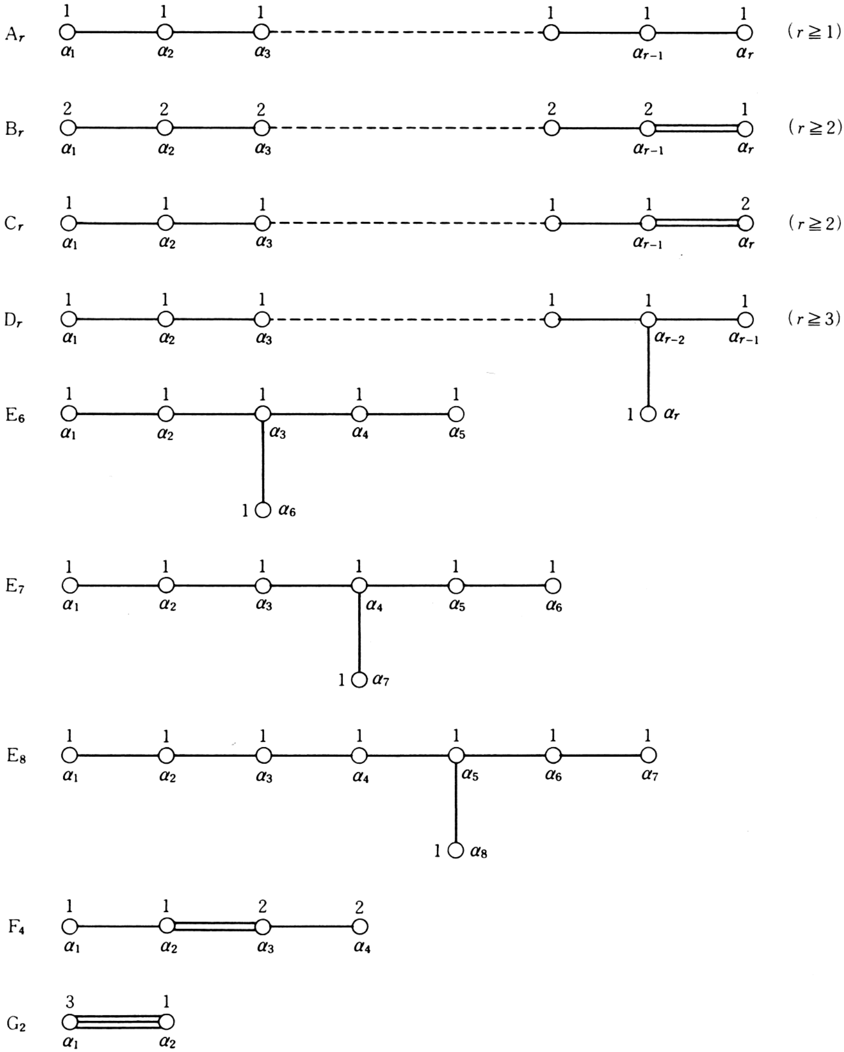


図 7.5

定理 7.18 (Cartan の分類定理) 複素単純 Lie 代数は，図 7.5 の型のどれかになる．異なる型の Lie 代数は同形でない． □

複素単純 Lie 代数のうち A_r, B_r, C_r, D_r型のものは**古典的** (classical) といわれ，E_6, E_7, E_8, F_4, G_2型のものは**例外的** (exceptional) といわれる．次に古典的 Lie 代数の例をあげる．例外的 Lie 代数については文献 [19],[30] を参照．

例 7.17 $\mathfrak{sl}(r+1,\mathbb{C})$． 例 7.13 に記したルートの基本系に応じて， $E_{\alpha_i} = E_{i,i+1}$, $E_{-\alpha_i} = E_{i+1,i}$となるから (例 7.11 の (7.25) による)，定理 7.9 の (iv) により，$[E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i}] = B(E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i})H_{\alpha_i}$となる．$B(E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i})$ に例 7.7 の公式を用い，$E_{\alpha_i}E_{-\alpha_i} = E_{i,i+1}E_{i+1,i} = E_{ii}$に注意すれば

$$B(E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i}) = 2(r+1)\mathrm{tr}(E_{ii}) = 2(r+1)$$

となるから

$$H_{\alpha_i} = \frac{1}{2(r+1)}(E_{ii} - E_{i+1,i+1}) \tag{7.40}$$

を得る．再び例 7.7 の公式を用いて内積 (7.28) を計算すれば

$$(\alpha_i, \alpha_j) = B(H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j}) = \frac{1}{2(r+1)}\mathrm{tr}\Big[(E_{i,i} - E_{i+1,i+1})(E_{j,j} - E_{j+1,j+1})\Big]$$

となり

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{1}{2(r+1)}\begin{cases} 0 & (|i-j| \geqq 2) \\ -1 & (|i-j| = 1) \\ 2 & (i = j) \end{cases} \tag{7.41}$$

が得られる．Dynkin 図形の重みづけにはα_iの一つを単位ベクトルに選ぶ約束だったから

$$(\alpha_i, \alpha_j)_{\mathrm{D}} := (r+1)(\alpha_i, \alpha_j) \tag{7.42}$$

を新しい内積としよう．これで重み $\|\,\alpha_i\,\|$ $(i = 1, \cdots, r)$ がすべて 1 となる．

$$\cos\theta_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)_{\mathrm{D}} = \begin{cases} 0 & (|i-j| \geqq 2) \\ -1/2 & (|i-j| = 1) \end{cases} \tag{7.43}$$

となるから，α_iとα_{i+1}が角 120° をなし，Dynkin 図形は 1 重線で結ばれる A_r 型となる．他の例については結果のみ挙げる —— Lie 代数の次元などとともに

表 7.3 を見よ．　□

注意　$B_2 = C_3$, $A_3=D_3$だったから

$$\mathfrak{o}(5, \mathsf{C}) \cong \mathfrak{sp}(4, \mathsf{C}), \quad \mathfrak{sl}(4, \mathsf{C}) \cong \mathfrak{o}(6, \mathsf{C}). \tag{7.44}$$

表 7.3　Lie 代数の型

型	次元		正のルートの総数	Weyl 群の位数	例
A_r	$r(r+2)$	$(r \geqq 1)$	$r(r+1)/2$	$(r+1)!$	$\mathfrak{sl}(r+1, \mathsf{C})$
B_r	$r(2r+1)$	$(r \geqq 2)$	r^2	$2^r r!$	$\mathfrak{o}(2r+1, \mathsf{C})$
C_r	$r(2r+1)$	$(r \geqq 2)$	r^2	$2^r r!$	$\mathfrak{sp}(2r, \mathsf{C})$
D_r	$r(2r-1)$	$(r \geqq 3)$	$r(r-1)$	$2^{r-1} r!$	$\mathfrak{o}(2r, \mathsf{C})$
E_6	78		36	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	
E_7	133		63	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	
E_8	248		120	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$	
F_4	52		24	$2^7 \cdot 3^2$	
G_2	14		6	$2^2 \cdot 3$	

§7.6　ウェイト

K 上の分離的半単純 Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とし，その分離的 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を一つとって固定する．そのルート系を Δ としよう．いよいよ $\mathfrak{g}$ の表現を考える．

(a)　ウェイト空間

(ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の表現とすれば，$\mathfrak{h}$ の任意の元 H の表現行列 $\rho(H)$ は対角化可能である．なぜなら：Δ の 1 次独立な元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ に対し $H_{\alpha_1}, \cdots, H_{\alpha_l}$ は $\mathfrak{h}$ の基底となり，$\mathfrak{a}_i = \mathsf{K}H_{\alpha_i} + \mathfrak{g}_{\alpha_i} + \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ は i ごとに定理 7.10 によって $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{K})$ と同形になるから，$(\overline{H}_{\alpha_i}, E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i})$ を $\mathfrak{a}_i$ の標準基底とすれば，$\rho(H_{\alpha_i})$ は対角化可能になる．ところが，$\rho(H)$ は互いに可換な $\rho(H_{\alpha_1}), \cdots, \rho(H_{\alpha_l})$ の線形結合で表わされるので，対角化可能である．

そこで，ルートの定義と並行に

定義 7.12　$\mathfrak{h}$ の双対空間 $\mathfrak{h}^*$ の元 λ に対して

$$\mathsf{V}_{\rho,\lambda} = \{\boldsymbol{v} \in \mathsf{V} : \forall H \in \mathfrak{h},\ \rho(H)\boldsymbol{v} = \lambda(H)\boldsymbol{v}\}$$

とおく．$\mathsf{V}_{\rho,\lambda} \neq \{0\}$ ならば，λ を ρ の**ウェイト** (weight) といい，$\mathsf{V}_{\rho,\lambda}$ を λ に属する**ウェイト空間** (weight space) という．その次元を λ の**重複度** (multiplicity) という．ρ が了解されているとき $\mathsf{V}_{\rho,\lambda}$ を V_λ とも書く． □

この定義からルートは随伴表現のウェイトにほかならない．任意のルート α に対し

$$\rho(\mathfrak{g}_\alpha)\mathsf{V}_\lambda \subset \mathsf{V}_{\lambda+\alpha} \tag{7.45}$$

が成り立つ．V は有限次元なので

定理 7.19 (ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の 0 でない表現とする．ρ のウェイトの全体 Λ は有限集合で

$$\mathsf{V} = \sum_{\lambda\in\Lambda} \oplus \mathsf{V}_\lambda \tag{7.46}$$

が成り立つ． □

したがって，ルートに対する定理と並行に

定理 7.20 (ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の 0 でない表現とし，Δ の任意の元を α，ρ の任意のウェイトを λ とする．

(i) $\lambda + m\alpha$ が ρ のウェイトであるような整数の最大値を p，最小値を $-q$ とすれば，$-q \leqq m \leqq p$ なる任意の整数 m に対して $\lambda + m\alpha$ は ρ のウェイトであり (これをウェイトの α 系列とよぶ)

$$\langle \lambda, \alpha \rangle = q - p.$$

(ii) $\lambda - \langle \lambda, \alpha \rangle \alpha$ は ρ のウェイトであり，その重複度は λ の重複度に等しい．

(iii) $\lambda + \alpha$ が ρ のウェイトならば，$\mathfrak{g}_\alpha$ の任意の 0 でない元 X に対して

$$\rho(X)\mathsf{V}_\lambda \neq \{0\}.$$ □

なお，(i) について，λ の代わりに $\lambda' = \lambda + k\alpha$ をとれば，p, q は $p' = p - k$，$q' = q + k$ となるが，やはり $\langle \lambda', \alpha \rangle = p' - q'$ が成り立つことに注意しよう．

ルート系 Δ の基本列 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ を一つとって固定する．そして，定理 7.13 で導入した Euclid 空間 E の元に次のようにして順序を入れる．まず，E の元 λ の展開 $\lambda = \sum_{i=1}^{r} c_i\alpha_i$ の係数 c_i がすべて負でないなら $\lambda \geqq 0$，正でないなら $\lambda \leqq 0$ と定める．そして，任意の 2 元 λ, μ に対して $\lambda - \mu \geqq 0$ のとき $\lambda \geqq \mu$，また $\lambda - \mu \leqq 0$ のとき $\lambda \leqq \mu$ と定める．これを Π に関する順序という．明らかに

$$\lambda \geqq \mu \text{ かつ } \lambda \leqq \mu \quad \text{ならば} \quad \lambda = \mu$$

$$\lambda \geqq \mu \text{ かつ } \mu \geqq \nu \quad \text{ならば} \quad \lambda \geqq \nu$$

$$\lambda \geqq \mu \quad \text{ならば} \quad \lambda+\nu \geqq \mu+\nu$$
$$\lambda \geqq \mu \text{ かつ } c \text{ が正の実数} \quad \text{ならば} \quad c\lambda \geqq c\mu$$
$$\lambda \geqq \mu \quad \text{ならば} \quad -\lambda \leqq -\mu.$$

定義 7.13 ρ を $\mathfrak{g}$ の 0 でない表現とする．ρ のウェイトの全体 Λ が Π に関する順序について最大元をもつとき，それを ρ の**最高ウェイト** (highest weight) という． □

$\mathfrak{g}$ の既約表現は必ず最高ウェイトをもつことが知られている．それは，次の意味で既約表現を特徴づける．

定理 7.21 $\mathfrak{g}$ の二つの既約表現について：同値 $\Longleftrightarrow$ 最高ウェイトが一致． □

最高ウェイトが知れると，同じ表現に属する他のウェイトがきまる．その手続きは後に説明するが，まず：

定理 7.22 $\mathfrak{g}$ の既約表現 ρ の最高ウェイトを ω とする．

(i) ω の重複度は 1 に等しい．

(ii) ρ の任意のウェイト λ は，ある負でない整数の組 $(m_1, \cdots, m_r)$ によって

$$\lambda = \omega - m_1\alpha_1 - \cdots - m_r\alpha_r$$

と表わされる． □

この定理に (7.45) を併用すると，(7.46) のどの成分 V_λ も最高ウェイトの V_ω に $\rho(E_{-\alpha})$ をくりかえし作用させれば得られることが分かる．

定理 7.21 により，$\mathfrak{g}$ の既約表現類をすべて求める問題は，最高ウェイトになるような $\mathfrak{h}$ 上の線形汎関数をすべて見いだす問題に帰着された．

まず，λ がウェイトなら，定理 7.20 の (i) により Δ の任意の元 α に対して $\langle\lambda, \alpha\rangle$ は整数である．一般に，$\mathfrak{h}$ 上のこの種の線形汎関数を**整形式** (integral form) というが，逆にどんな整形式も $\mathfrak{g}$ のある既約表現のウェイトになることが知られている．そして，$\mathfrak{h}$ 上の線形汎関数が整形式であるためには $\langle\lambda, \alpha_i\rangle$ $(i=1, \cdots, r)$ がすべて整数となることが必要十分なのである．

では，どんな整形式が最高ウェイトになるのか？ ω を最高ウェイトとすれば，定理 7.20 の (ii) により，その Weyl 鏡映 $S_\alpha(\omega)$ もウェイトになるから $\omega \geqq S_\alpha(\omega)$ でなければならない．$S_\alpha(\omega) = \omega - \langle\omega, \alpha_i\rangle\alpha_i$ で α_i が正のルートなので，$\langle\omega, \alpha_i\rangle$ は負でない整数である．一般に，線形汎関数 λ に対して $\langle\lambda, \alpha_i\rangle$ $(i=1, \cdots, r)$ がすべて負でない整数のとき λ を**支配的** (dominant) であるという．こうして，最

高ウェイトは支配的な整形式である．実は，逆も正しい．

定理 7.23 $\mathfrak{g}$ の任意の既約表現の最高ウェイトは $\mathfrak{h}$ 上の支配的整形式である．逆に，$\mathfrak{h}$ 上の任意の支配的な整形式は $\mathfrak{g}$ のある既約表現の最高ウェイトになっている． □

$\mathfrak{h}$ 上の支配的な整形式をすべて求める問題は，Δ の Cartan 行列の逆行列を求める問題に帰着する．

$\alpha \in \Delta$ の反転を

$$\alpha^{\vee} = \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \alpha \tag{7.47}$$

で定義すれば，$\alpha_i \in \Pi$ の反転からなる $(\alpha_1^{\vee}, \cdots, \alpha_r^{\vee})$ も，ルート系 Δ の張る空間 E (定理 7.13) の基底をなすので，その双対基底を $(\omega_1, \cdots, \omega_r)$ とすれば

$$\langle \omega_i, \alpha_j \rangle = (\omega_i, \alpha_j^{\vee}) = \delta_{i,j} \quad (i, j = 1, \cdots, r) \tag{7.48}$$

が成り立つ．ゆえに，$\omega_1, \cdots, \omega_r$ はすべて $\mathfrak{h}$ 上の支配的な整形式である．そして，λ を $\mathfrak{h}$ 上の任意の支配的な整形式とすれば

$$m_i = \langle \lambda, \alpha_i \rangle = (\lambda, \alpha_i^{\vee}) \tag{7.49}$$

はすべて負でない整数であって，$\lambda = \sum_{i=1}^{r} m_i \omega_i$ と表わされる．逆に，$(m_1, \cdots, m_r)$ を任意の負でない整数の組とすれば，$\lambda = \sum_{i=1}^{r} m_i \omega_i$ は支配的な整形式である．こうして，$(\omega_1, \cdots, \omega_r)$ からすべての支配的な整形式が求められることがわかった．これを (Πに関する) **ウェイトの基本系** (fundamental system of weights) という．

定理 7.24 A を Δ の (Πに関する)Cartan 行列とすれば，ウェイトの基本系は

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_r \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} \tag{7.50}$$

で与えられる．

［証明］ $A = (a_{ij})$ とし，$\omega_i = \sum_{j=1}^{r} c_{ij} \alpha_j$ と展開されるとすれば，

$$\delta_{ij} = (\omega_i, \alpha_j^{\vee}) = \sum_{k=1}^{r} c_{ik} a_{kj}$$

となり，$c_{ij} = (A^{-1})_{ij}$． ∎

例 7.18 階数 2 の Lie 代数のウェイトの基本系. 定理 7.24 により例 7.15 の行列から：

$$\mathrm{A}_2:\begin{cases}\omega_1 &= \dfrac{1}{3}(2\alpha_1+\alpha_2)\\ \omega_2 &= \dfrac{1}{3}(\alpha_1+2\alpha_2)\end{cases}\qquad \mathrm{B}_2:\begin{cases}\omega_1 &= (\alpha_1+\alpha_2)\\ \omega_2 &= \dfrac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2\end{cases}$$

$$\mathrm{G}_2:\begin{cases}\omega_1 &= 2\alpha_1+3\alpha_2\\ \omega_2 &= \alpha_1+2\alpha_2\end{cases}$$

□

(b) 最高ウェイト ω をもつ既約表現

以後，単純 Lie 代数 (階数 r) の $m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r$ を最高ウェイトとする既約表現 (N次元) を $D^N(m_1,\cdots,m_r)$ で表わす.

定理 7.25 (Weyl の次元数公式) 最高ウェイト ω をもつ既約表現の次元数は

$$N=\frac{\prod_{\alpha>0}(\alpha,\omega+\delta)}{\prod_{\alpha>0}(\alpha,\delta)}\qquad\left(\delta:=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha\right)$$

であたえられる. ここに，積と和はすべての正のルートにわたる. □

例 7.19 階数 2 の単純 Lie 代数の既約表現 $\mathrm{D}^N(m_1,m_2)$ の次元数：

A_2型の場合. 図 7.3 より，ルートの基本系 ($\alpha_1=\alpha,\ \alpha_2=\beta$) を用いて，正のルートは：$\alpha,\beta,\alpha+\beta$. ゆえに $\delta=\alpha+\beta$.

例 7.18 で得たウェイトの基本系を用いて，最高ウェイトは

$$\omega=\frac{1}{3}\Big\{(2m_1+m_2)\alpha+(m_1+2m_2)\beta\Big\}$$

であり，$(\alpha,\alpha)=(\beta,\beta)=1$，また表 7.1の 3 の行より $\langle\alpha,\beta\rangle=-1$ だから

$$(\alpha,\omega+\delta)=\frac{1}{3}\Big\{(2m_1+m_2+3)(\alpha,\alpha)+(m_1+2m_2+3)(\alpha,\beta)\Big\}=\frac{1}{2}(m_1+1).$$

同様にして，$(\beta,\omega+\delta)=(m_2+1)/2$. これらを加えて，

$$((\alpha+\beta),(\alpha+\beta))=\frac{1}{2}(m_1+m_2+2).$$

また，

$$(\alpha,\delta)=(\alpha,\alpha)+(\alpha,\beta)=\frac{1}{2},\quad (\beta,\delta)=\frac{1}{2},\quad ((\alpha+\beta),(\alpha+\beta))=1.$$

したがって，Weyl の次元数公式から

$$\mathrm{A}_2:\ N=\frac{1}{2}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2).$$

同様にして

$$\mathrm{B}_2:\ N=\frac{1}{6}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)(2m_1+m_2+3),$$

$$\mathrm{G}_2:\ N=\frac{1}{120}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)\times(2m_1+m_2+3)(3m_1+m_2+4)(3m_1+2m_2+5).$$

□

最高ウェイト ω をもつ既約表現の他のウェイト λ を求めよう．λ は，定理 7.22, (ii) の式により，負でない整数の組 $(m_1,\cdots,m_r)$ で一意に表わされる．その計算は**引算数** (subtraction number) $\mathrm{st}(\lambda)=\sum_{i=1}^{r}m_i$ について帰納的に進める．

まず，$\mathrm{st}(\lambda)=0$ のとき $\lambda=\omega$ である．次に $n\geqq 1$ とし，$\mathrm{st}(\mu)\leqq n-1$ のウェイト μ は得られているとしよう．$\mathrm{st}(\lambda)=n$ のウェイト λ は

$$\lambda=\mu-\alpha_i\qquad(\mathrm{st}(\mu)=n-1,\ i=1,\cdots,r)$$

の形であるが，帰納法の仮定から $\mu+k\alpha$ がウェイトとなる k の最大値 p は知れている．定理 7.20, (i) より k の最小値は $q=p+\langle\mu,\alpha_i\rangle$ から知られる．もし $q>0$ なら，その α_i について $\mu-\alpha_i$ はウェイトである．この判定を $i=1,\cdots,r$ にわたって行ない $\mathrm{st}(\lambda)=n$ のウェイト λ がすべて得られる．

ウェイト λ をもつ既約表現の重複度 d_λ は，次の公式により，最高ウェイトの $d_\omega=1$ から始めて順次に計算する．

定理 7.26 (Freudenthal の再帰公式)　最高ウェイト ω をもつ既約表現の任意のウェイト λ の重複度を d_λ とすれば

$$\Bigl\{(\omega+\delta,\omega+\delta)-(\lambda+\delta,\lambda+\delta)\Bigr\}d_\lambda=2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\alpha>0}d_{\lambda+k\alpha}(\lambda+k\alpha,\alpha)$$

ただし，$\lambda+k\alpha>\omega$ の $d_{\lambda+k\alpha}$ は 0 とする．α,δ は上と同じ．　□

例 7.20　A_2型単純 Lie 代数の表現 $\mathrm{D}^N(m_1,m_2)$ $(m_1=2,\ m_2=2)$ のウェイト系．

例 7.19 の公式により，この表現は $N=27$ 次元．最高ウェイトは $\omega=2(\alpha+\beta)$ である．$\langle\omega,\alpha\rangle=\langle\omega,\beta\rangle=2$ で，いま $p=0$ だから $q=-2$ と知れ，ω を含むウェイトの α 系列および β 系列は：

$$\omega, \quad \omega-\alpha, \quad \omega-2\alpha; \quad \omega, \quad \omega-\beta, \quad \omega-2\beta$$

をも含む．このうち，引算数 1 のウェイトは $\omega-\alpha$, $\omega-\beta$ である．$\omega-2\alpha$, $\omega-2\beta$ は引算数 2 のウェイトなので，さらに $\omega-\alpha-\beta$ がウェイトか否かを知るため，$\mu := \omega-\beta$ を含む α 系列を調べよう．$\langle \mu, \alpha \rangle = 3$ で $\mu+\alpha$ はルートでないから

$$\omega-\beta, \quad \omega-\beta-\alpha, \quad \omega-\beta-2\alpha, \quad \omega-\beta-3\alpha$$

がその α 系列であり，$\omega-\alpha-\beta$ を含んでいる．こうして引算数 2 のウェイトはすべて得られた．

この推論を続けて次の結果を得る．

$$\begin{array}{ccccccccc}
\omega & \to & \omega-\beta & \to & \omega-2\beta & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\omega-\alpha & \to & \omega-\alpha-\beta & \to & \omega-\alpha-2\beta & \to & \omega-\alpha-3\beta & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\omega-2\alpha & \to & \omega-2\alpha-\beta & \to & \omega-2\alpha-2\beta & \to & \omega-2\alpha-3\beta & \to & \omega-2\beta-4\beta \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \omega-3\alpha-\beta & \to & \omega-3\alpha-2\beta & \to & \omega-3\alpha-3\beta & \to & \omega-3\alpha-4\beta \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \omega-4\alpha-2\beta & \to & \omega-4\alpha-3\beta & \to & \omega-4\alpha-4\beta
\end{array}$$

こうして得られたウェイトを図 7.3 にならって図示すれば，図 7.6 となる． □

このウェイトの総数は 19 であるが，表現は 27 次元だから，いくつかのウェイトの重複度は 1 より大きいはずである．重複度は Freudenthal の公式 (定理

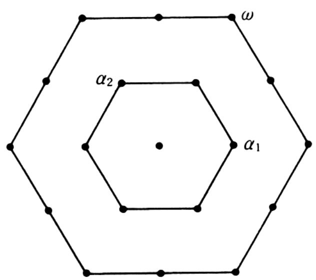


図 7.6

7.26) で計算されるが，特に A_2型単純 Lie 代数については簡単な規則が知られている[*6]．すなわち，図 7.6 の最も外側の点を結ぶと凸多角形ができる．これを**殻** (shell) とよぶ．同様にして内側に向かって殻をつくってゆくと，多角形で終わることもあり，1 点のみ残って終わることもある．こうすると，重複度は：(1) 同じ殻の上では等しい．(2) 最も外側の殻では 1．(3) 一つ内側の殻に進むと 1 だけ増す．ただし，正三角形の殻に到達したら以後は増減なしとする．

図 7.6 の例では，重複度は外側の殻から順に 1, 2, 3 となる．各殻のウェイトの数は 12, 6, 1 であり，$12 \times 1 + 6 \times 2 + 3 \times 1 = 27$ は確かに表現の次元数に等しい．

(c) 積表現の既約分解

定理 7.27 (Kostant–Steinberg の公式) 最高ウェイト ω_1, ω_2をもつ既約表現 ρ_1, ρ_2の直積に最高ウェイト ω の既約表現 ρ が現われる回数は

$$n_\rho = \sum_{S,T \in \mathrm{W}} \det(ST) P\Big(S(\omega_1+\delta) + T(\omega_2+\delta) - (\omega+2\delta)\Big).$$

ここに，W はルート系の Weyl 群，δ は定理 7.25 と同じである．$P(\lambda)$ は**分割関数** (partition function) で，$\mathfrak{h}$ 上の整形式 λ に対して定義され，不定方程式

$$m_1\beta_1 + \cdots + m_k\beta_k = \lambda$$

の非負の整数解 $\{m_i\}$ の総数を表わす．ただし $\beta_1, \cdots, \beta_k$ は正のルートとする．□

なお，S, T が互いに角 θ をなす α, β に応ずる反転のとき，積 ST は α, β の張る平面内での角 2θ の回転を表わす．

§7.7 $\mathfrak{sl}(r+1, \mathrm{C})$ の表現

(a) 恒等表現

$\mathfrak{sl}(r+1, \mathrm{C})$ の各元に自身を対応させる写像は最も簡単な表現で，$\mathfrak{sl}(r+1, \mathrm{C})$ の**恒等表現** (identity representation) とよばれる．これを ρ と記す．表現空間は $\mathrm{V} = \mathrm{C}^{r+1}$である：

*6 J. P. Antoine and D. Speiser, J. Math. Phys. **5** (1964), 1226.

$$\rho(X)\boldsymbol{v} = X\boldsymbol{v} \qquad \Big(X \in \mathfrak{sl}(r+1,\mathsf{C}),\ \boldsymbol{v} \in \mathsf{V}\Big) \tag{7.51}$$

ρ のウェイトは例 7.11 で定義した r 個の整形式

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_r, \lambda_{r+1}\ (:= -\lambda_1 - \cdots - \lambda_r)$$

である．例 7.13 で見たように

$$\alpha_r = \lambda_r, \quad \alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} \quad (i = 1, \cdots, r-1) \tag{7.52}$$

の全体がルートの基本系をなすので，これによる順序に関して

$$\lambda_r = \alpha_r < \lambda_{r-1} = \alpha_{r-1} + \alpha_r < \cdots < \lambda_1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$$

となる．λ_1が最高ウェイトである．

$\mathfrak{sl}(r+1,\mathsf{C})$ の表現は定理 7.18 が示すように A_r型であり，Cartan 行列は (7.41) から付録 A.3 に示すとおりになる．その逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{r+1}\begin{pmatrix} r & r-1 & r-2 & r-3 & \cdots & 1 \\ r-1 & 2(r-1) & 2(r-2) & 2(r-3) & \cdots & 2 \\ r-2 & 2(r-2) & 3(r-2) & 3(r-3) & \cdots & 3 \\ r-3 & 2(r-3) & 3(r-3) & 4(r-3) & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & r \end{pmatrix}$$

であるから，ウェイトの基本系は

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \lambda_1 \\ \omega_2 &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \omega_r &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r. \end{aligned} \tag{7.53}$$

(b) ω_kを最高ウェイトとする表現

ベクトル空間 V の基底を $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{r+1})$ とし，反対称部分空間 $\mathrm{Alt}^2(\mathsf{V})$ を

$$\boldsymbol{v}_i \wedge \boldsymbol{v}_j := \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_j \otimes \boldsymbol{v}_i \qquad (1 \leqq i < j \leqq r+1) \tag{7.54}$$

を基底にもつ $r(r+1)/2$ 次元複素線形空間として定義する．そして$\overline{\rho}_{2,\mathrm{A}}$を

$$\overline{\rho}_{2,\mathrm{A}}(X)(\boldsymbol{v}_i \wedge \boldsymbol{v}_j) := (X\boldsymbol{v}_i) \wedge \boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{v}_i \wedge (X\boldsymbol{v}_j) \quad (X \in \mathfrak{sl}(r+1,\mathsf{C})) \tag{7.55}$$

によって定義すれば，これは最高ウェイト $\lambda_1+\lambda_2$ をもつ表現になる．実際，前項 (a) の恒等表現 ρ をとり例 7.11 の H に対して

$$\rho(H)\boldsymbol{v}_i=\lambda_i(H)\boldsymbol{v}_i \qquad (i=1,\cdots,r) \tag{7.56}$$

となるものとする．こうすれば，

$$\overline{\rho}_{2,\mathrm{A}}(H)\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2=\Big(\lambda_1(H)+\lambda_2(H)\Big)\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2 \tag{7.57}$$

が成り立つのである．

これに対して，対称部分空間 $\mathrm{Sym}^2(\mathsf{V})$ を

$$\boldsymbol{v}_i\otimes_{\mathrm{S}}\boldsymbol{v}_j:=\boldsymbol{v}_i\otimes\boldsymbol{v}_j+\boldsymbol{v}_j\otimes\boldsymbol{v}_i \qquad (1\leqq i\leqq j\leqq r+1) \tag{7.58}$$

を基底にもつ $(r^2+3r+2)/2$ 次元複素線形空間として定義し，$\overline{\rho}_{2,\mathrm{S}}(X)$ を (7.55) と同様に定義すれば，最高ウェイト $2\lambda_1$ の表現が得られる．今度の (7.58) では，(7.54) と違って，$i=j$ が許されるからである．

これを一般化しよう．ここでも添字について Einstein の規約にしたがうことにし，$\mathrm{Alt}^k(\mathsf{V})$ を

$$\boldsymbol{v}_{i_1}\wedge\boldsymbol{v}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_{i_k}:=\varepsilon_{i_1,\cdots,i_k}\boldsymbol{v}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{i_k} \tag{7.59}$$
$$(1\leqq i_1<\cdots<i_k;\ k=1,\cdots,r)$$

を基底とする線形空間と定義する．ここに，$\varepsilon_{i_1,\cdots,i_k}$ は $(i_1,\cdots,i_k)$ が $(1,\cdots,k)$ の偶置換のとき $+1$，奇置換のとき -1，その他のとき 0 と定める．こうすると

定理 7.28　$1\leqq k\leqq r$ とする．$\rho_k=\rho\otimes\cdots\otimes\rho$ (k個の積) とおけば，$\mathrm{Alt}^k(\mathsf{V})$ は ρ_k 不変である．ρ_k の $\mathrm{Alt}^k(\mathsf{V})$ 上の部分表現を $\overline{\rho}_k$ とすれば，これは

$$\omega_k=\lambda_1+\cdots+\lambda_k$$

を最高ウェイトとする既約表現を与える．$\mathfrak{sl}(r+1,\mathsf{C})$ の作用は，もはや書くまでもないが

$$\begin{aligned}&\overline{\rho}_{k,\mathrm{A}}(X)(\boldsymbol{v}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_{i_k})\\&\quad=(X\boldsymbol{v}_{i_1})\wedge\boldsymbol{v}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_{i_k}+\boldsymbol{v}_{i_1}\wedge(X\boldsymbol{v}_{i_2})\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_{i_k}\\&\qquad+\cdots+\boldsymbol{v}_{i_1}\wedge\boldsymbol{v}_{i_2}\wedge\cdots\wedge(X\boldsymbol{v}_{i_k})\end{aligned}$$

とする．　□

(c)　$\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{\omega}_1+\cdots+\boldsymbol{m}_r\boldsymbol{\omega}_r$ を最高ウェイトとする表現

表題の表現は，次に定義する Young の対称子を用いて構成する．まず，Young の台 (文献 [6]) とは，図 7.7 のように正方形の箱からなる行を左端をそろえて上

下に並べ，ただし下の行の箱の数が上の行の数を越えないようにした鍵形の図形．上から i 番目の行の箱の数が p_i $(p_1 \geqq p_2 \geqq \cdots \geqq p_\tau)$ のとき $(p_1, \cdots, p_\tau)$ 型であるという．

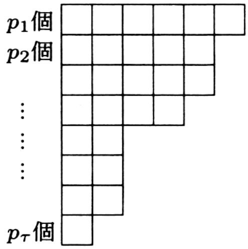


図 7.7

いま，箱の総数を $p_1 + \cdots + p_\tau = k$とし，箱に番号 $1, 2, \cdots, k$ を振って例えば図 7.8 のようにしたとき **Young 図** (Young diagram) という．Young 図 T に対応する水平対称子 Pを各行 i のあらゆる置換の演算子の和 $P^{(i)}$の積 $P = \prod_{i=1}^{\tau} P^{(i)}$ とし，同様に垂直対称子 Q を各列 j のあらゆる置換演算子の反対称和[*7]$Q^{(j)}$ の積 $Q = \prod_{j=1}^{\sigma} Q^{(j)}$として，それらの積 $C_{\mathrm{T}} = QP$を **Young の対称子** (Young's symmetrizer) という．図 7.8 の例では

$$
\begin{aligned}
P &= \Big[1 + (12)\Big]\Big[1 + (34)\Big], \\
Q &= \Big[1 - (13) - (15) - (35) + (135) + (153)\Big]\Big[1 - (24)\Big]
\end{aligned}
\tag{7.60}
$$

となる．

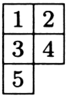


図 7.8

V_kの基底に対する対称子の作用を

$$
\begin{aligned}
&\Big[1 - (12)\Big] \boldsymbol{v}_{i_1} \otimes \boldsymbol{v}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{i_k} \\
&= \Big[\boldsymbol{v}_{i_1} \otimes \boldsymbol{v}_{i_2} - \boldsymbol{v}_{i_2} \otimes \boldsymbol{v}_{i_1}\Big] \otimes \boldsymbol{v}_{i_3} \cdots \boldsymbol{v}_{i_k}
\end{aligned}
\tag{7.61}
$$

---

*7　奇置換には − 符号，偶置換には + 符号をつけて加えた和．

のように定める．一般の場合も，これから類推されよう．ここで $i_1 = i_2$ であると，対称子の作用の結果は0となる．一般に，Young 図 T の同じ列に対応する i_n に互いに等しいものがあるような基底は対称子 C_{T} を作用させると消えてしまう．

定理 7.29 $(p_1, \cdots, p_\tau)$ $(\tau \leqq r+1)$ 型の台からつくった Young の図 T に対応する Young の対称子を C_{T} とする．$p_1 + \cdots + p_\tau = k$ とし，V_k の基底 $\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_k$ の添字に C_{T} を施したもの全体が張る複素線形空間を $C_{\mathrm{T}}(\mathsf{V}_k)$ とする．これは ρ_k 不変であり，ρ_k の $C_{\mathrm{T}}(\mathsf{V}_k)$ 上の部分表現は

$$\omega = m_1\omega_1 + \cdots + m_\tau\omega_\tau$$
$$(m_1 = p_1 - p_2,\ \cdots,\ m_{\tau-1} = p_{\tau-1} - p_\tau,\ m_\tau = p_\tau)$$

を最高ウェイトにもつ $\mathfrak{sl}(r+1, \mathsf{C})$ の既約表現である．ただし，$\tau = r+1$ のときは $m_\tau = 0$ とする． □

この ω が最高ウェイトであることは，(7.53) により

$$\begin{aligned}\omega &= (p_1 - p_2)\omega_2 + \cdots + (p_{\tau-1} - p_\tau)\omega_{\tau-1} + p_\tau\omega_\tau \\ &= p_1\lambda_1 + \cdots + p_\tau\lambda_\tau \end{aligned} \tag{7.62}$$

となることから明らかである．実際，$C_{\mathrm{T}}(\mathsf{V}_k)$ の基底 $\boldsymbol{v}$ は (7.60) の下に注意した理由から T の同じ列に対応する $\boldsymbol{v}_{i_n}$ は互いに等しくはあり得ないので，最高ウェイトの $\boldsymbol{v}$ は T の各行に対応する因子を掛けあわせた

$$\overbrace{\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_1}^{\text{第 1 行},\ p_1 \text{個}} \otimes \overbrace{\boldsymbol{v}_2 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_2}^{\text{第 2 行},\ p_2 \text{個}} \otimes \cdots \otimes \overbrace{\boldsymbol{v}_\tau \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_\tau}^{\text{第 } \tau \text{ 行},\ p_\tau \text{個}} \tag{7.63}$$

とした構成に C_{T} をかけて得られることになる．なお，(7.56) を参照．

注意 Young 図が異なっても，台の型が同じなら得られる表現は同値である．さらに台の型が $(p_1, \cdots, p_\tau)$ と $(p'_1, \cdots, p'_\sigma)$ のように異なっても，各 i で $p_i - p_{i+1} = p'_i - p'_{i+1}$ なら，定理 7.21 により表現は同値になる．

(d) 積表現の既約分解

$(p_1, \cdots, p_\tau)$ 型，$(p'_1, \cdots, p'_\sigma)$ 型の台 A, B から得られた $\mathfrak{sl}(r+1, \mathsf{C})$ の既約表現の直積を既約分解するには，次のようにすればよい (参考書 [5] の付録)．

第1段 それぞれの台を描き，台 B の第1行，第2行，…，の箱をそれぞれ文字 a, b, … で埋める (図 7.9)．

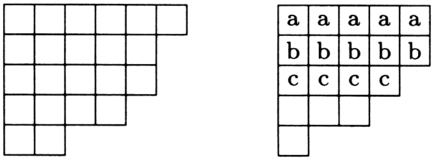


図 7.9

第 2 段 台 A に，B の文字 a の箱を，次の規則で許されるあらゆる仕方で付け加え，それが終ったら b の箱を同様に付け加える，…．その規則とは：Young の台に要求されるもの (台の行数は $r+1$ 以下であり，下の行は上の行より長くない) に加えて：

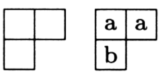
(1) 同一の列に同じ文字は入れない．

(2) 付け加えられた文字を，第 1 行は右から左に読み，第 2 行は左から右に読み，…，して得られる文字列が**束順列** (lattice permutation) をなすこと．その意味は，次のとおり：任意の自然数 n に対し，最初の n 項の含む a の個数は b の個数より少なくなく，b の個数は c の個数より少なくなく，…….

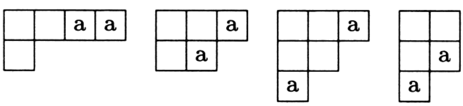
こうして得られるすべての台が問題の直積の既約成分を与える．ただし，$r+1$ 個の箱からなる列があれば，それは 1 次元表現を直積するだけになるから削ってよい．

例 7.21 $\mathfrak{sl}(3,\mathbf{C})$ の積表現 $D^8(1,1)\otimes D^8(1,1)$ の既約分解．

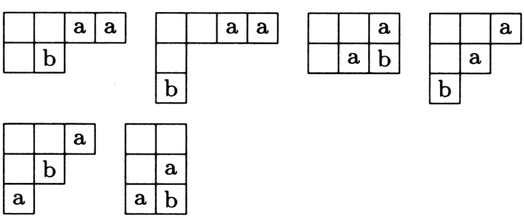
第 1 段



第 2 段 (i)

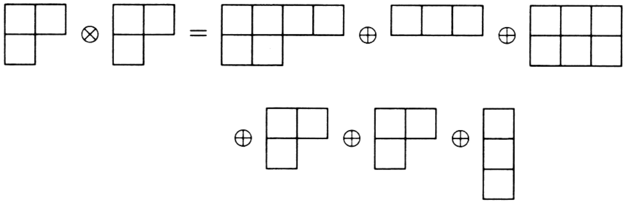


第 2 段 (ii)



結局，六つの台が得られたが，三つの箱からなる列は取り去って，次の既約

分解を得る：



すなわち：

$$
\begin{aligned}
D^8(1,1) \otimes D^8(1,1) &= D^{27}(2,2) \oplus D^{10}(3,0) \oplus D^{10}(0,3) \\
&\quad \oplus D^8(1,1) \oplus D^8(1,1) \oplus D^1(0,0).
\end{aligned}
$$

各表現の次元は Weyl の次元数公式 (定理 7.25) によって計算した (p.210 の A_2 の場合．表 7.3 を参照)． □

§7.8 素粒子の対称性

特殊ユニタリ群 SU(n) は物理学において素粒子の対称性の分析に不可欠の役割を演じているが，本節では，対称性がかなり良い近似で成り立っている理由は何か，表現論がどのように根幹部分に関わっているかなど，ウェイトの方法をもとに解説する．対称性の破れをはじめ述べるべきことは多いが，ここでは数学的な基本に限る．

その際，物理では SU(n) の Lie 代数 $\mathfrak{su}(n)$ の基底に Hermite 行列を採用するのだが，そのため交換関係に純虚数が現れ，$\mathfrak{su}(n)$ は実 Lie 代数であるとの建前が崩れている．しかしウェイトは成分が実数の固有値のベクトルとなって，途中の議論は少しゴタゴタするけれども，うまくいっている．本書でこれまで展開してきた数学者の方法と，物理学者の方法との照合をしておく．

Lie 代数の定義によれば，$\mathfrak{su}(n)$ の元は交代 Hermite 行列である．そしてこの代数は実 Lie 代数をなす．われわれがほしいのは，これの複素既約表現であるが，それはこの代数の複素化 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ の複素既約表現を $\mathfrak{su}(n)$ 上に制限して得られるものに同値で，しかもこれらで尽くされる．例 7.11，例 7.13 および例 7.17 からわかるように，$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ がルートの基本系をなし，

$$H_{\alpha_i}=\frac{1}{2n}(E_{i,i}-E_{i+1,i+1}),\quad E_{\alpha_i}=E_{i,i+1},\quad E_{-\alpha_i}=E_{i+1,i} \tag{7.64}$$

が $\mathfrak{sl}(n,\mathsf{C})$ の基底をなして，H_{α_i} $(i=1,\cdots,n-1)$ が Cartan 部分代数の基底となっている．そして

$$\mathrm{ad}(H_{\alpha_i})E_{\pm\alpha_j}=\pm(\alpha_i,\alpha_j)E_{\pm\alpha_j} \tag{7.65}$$

が成り立つ．また，(ρ,V) を既約表現とし，λ をそれに属するウェイトとするとき，$\mathfrak{sl}(n,\mathsf{C})$ の元は表現写像 ρ を通して

$$\rho(H_{\alpha_i})\boldsymbol{v}=(\lambda,\alpha_i)\boldsymbol{v},\quad \rho(E_{\pm\alpha_j})\boldsymbol{v}\in\mathsf{V}_{\lambda\pm\alpha_j}\quad(\forall\boldsymbol{v}\in\mathsf{V}_\lambda) \tag{7.66}$$

のようにはたらく．λ は基本ルートの 1 次結合によって表わされ，基本ルート系は Dynkin 図形によってその情報を得ることができるので，表現 ρ を知ったということができる．そこで $\mathfrak{su}(n)$ の基底として

$$\hat{H}_k=\mathrm{i}H_{\alpha_k},\quad U_{\alpha_k}=E_{\alpha_k}-E_{-\alpha_k},\quad V_{\alpha_k}=\mathrm{i}(E_{\alpha_k}+E_{-\alpha_k}) \tag{7.67}$$

を採用すれば，これらの基底の ρ を通しての作用から，$\mathfrak{su}(n)$ の表現を知ることになる．$\mathfrak{su}(n)$ は分離的でないから，本文で展開した方法では表現はつくれないけれども，上で述べた方法で十分であり，また先走るけれども物理的には，荷電スピンの上昇・下降演算子は複素化された $\mathfrak{sl}(n,\mathsf{C})$ の元 $E_{\pm\alpha_1}$ の作用が使われ，素粒子のクォークによる構成にはその他の元 $E_{\pm\alpha_2}, E_{\pm\alpha_3}$ の作用も使われるので，必要でもある．

以下，$n=3$ の場合を考察する．そのとき，基本ルートは α_1 と α_2 の二つで，ルート系 Δ は

$$\Delta=\{\pm\alpha_1,\,\pm\alpha_2,\,\pm(\alpha_1+\alpha_2)\} \tag{7.68}$$

である．簡単のため

$$\alpha_3:=\alpha_1+\alpha_2 \tag{7.69}$$

と記すことにする．(7.41) によれば，

$$(\alpha_1,\alpha_2)=-1/6,\quad (\alpha_1,\alpha_1)=(\alpha_2,\alpha_2)=1/3$$

であるが，Dynkin 図形からは (7.42)，

$$(\alpha_1,\alpha_2)=-1/2,\quad (\alpha_1,\alpha_1)=(\alpha_2,\alpha_2)=1 \tag{7.70}$$

が得られ，物理的にもこの方が便利なので，この正規化を採用する．そのためには，$\mathfrak{sl}(3,\mathsf{C})$ の Killing 形式を，

$$B(X,Y) = 2\mathrm{tr}(X,Y) \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{sl}(3,\mathrm{C})) \tag{7.71}$$

と変更すればよい．Killing 形式の正の定数倍の変更は Lie 代数の理論になんの変更もおよぼさない．このとき Cartan 部分代数の基底 H_{α_1}, H_{α_2} は

$$H_{\alpha_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_{\alpha_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.72}$$

となる．$E_{\pm\alpha_i}$ $(i = 1,2,3)$ については，

$$B(E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i}) = 1 \tag{7.73}$$

と正規化するのが便利なので，$1/\sqrt{2}$ の係数をかけたもの

$$E_{\alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.74}$$

$$E_{\alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.75}$$

を採用する．$E_{\pm\alpha_3}$ については，(7.22) と定理 7.9 の (iii) より，

$$E_{\alpha_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.76}$$

と定める．以上のものを $\mathfrak{sl}(3,\mathrm{C})$ の基底に採用する．これを **Weyl の基底**という．それらの間の交換関係は下記の通りである．

$$[H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}] = 0$$

$$[H_{\alpha_i}, E_{\pm\alpha_i}] = \pm E_{\pm\alpha_i} \quad (i = 1,2;\ \text{複号同順})$$

$$[H_{\alpha_1}, E_{\pm\alpha_2}] = \mp(1/2)E_{\pm\alpha_2}, \quad [H_{\alpha_1}, E_{\pm\alpha_3}] = \pm(1/2)E_{\pm\alpha_3} \quad (\text{複号同順})$$

$$[H_{\alpha_2}, E_{\pm\alpha_1}] = \mp(1/2)E_{\pm\alpha_1}, \quad [H_{\alpha_2}, E_{\pm\alpha_3}] = \pm(1/2)E_{\pm\alpha_3} \quad (\text{複号同順})$$

$$[E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i}] = H_{\alpha_i} \quad (i = 1,2,3;\ H_{\alpha_3} = H_{\alpha_1} + H_{\alpha_2})$$

Gell-Mann による $\mathfrak{su}(3)$ の基底 (Hermite 行列) との関係は次の通りである．

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \sqrt{2}(E_{-\alpha_1} + E_{\alpha_1}), \quad \lambda_2 = \sqrt{2}\mathrm{i}(E_{-\alpha_1} - E_{\alpha_1}) \\ &\lambda_4 = \sqrt{2}(E_{-\alpha_3} + E_{\alpha_3}), \quad \lambda_5 = \sqrt{2}\mathrm{i}(E_{-\alpha_3} - E_{\alpha_3}) \\ &\lambda_6 = \sqrt{2}(E_{-\alpha_2} + E_{\alpha_2}), \quad \lambda_7 = \sqrt{2}\mathrm{i}(E_{-\alpha_2} - E_{\alpha_2}) \\ &\lambda_3 = 2H_{\alpha_1}, \qquad\qquad\qquad \lambda_8 = \frac{2}{\sqrt{3}}(H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2}) \end{aligned} \tag{7.77}$$

上にも触れたが，荷電スピンの上昇・下降演算子には，採用する表現の写像ρを用いて $\rho(E_{\pm\alpha_1})$ をとる．Gell-Mann の基底では，$(\rho(\lambda_1) \pm \mathrm{i}\rho(\lambda_2))/2\sqrt{2}$ と表わされる．ところが，物理では表現の写像は多くの場合省いて書かないので，$\mathfrak{su}(3)$ の表現を用いたのか，その複素化 $\mathfrak{sl}(3, \mathsf{C})$ の表現を用いたのかが曖昧になる．しかしどちらも複素表現を用いるのであるから，幸にもその二つは同値となって，数学者のやり方と物理学者のやり方とはぴたりと整合性をもっている．

いよいよ素粒子の対称性の考察に入るが，そのためには表現論と対称性の物理を結ぶ要請をおかなければならない：

[I]　粒子，共鳴状態など，スピンとパリティを同じくする一組の粒子的状態は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のある複素既約表現 (ρ, V) の基底に対応する．

[II]　反粒子は元の粒子の属する表現の反傾表現 (演習問題 7.10 参照) の基底に対応する．

[III]　表現 ρ に属するウェイト λ のウェイト空間 V_λ の基底には，[I]の一組の物理的状態の中のどれかのメンバーが対応するものとする．

[IV]　$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ から適当な基底 $H_1, \cdots, H_r$ を選んで，$\rho(H_1), \cdots, \rho(H_r)$ をもって保存量を記述する演算子とする．したがって固有値 $\lambda(H_1), \cdots, \lambda(H_r)$ は V_λ の基底に対応している粒子を特徴づける量子数の組である．

[V]　ある粒子族を記述する表現が ρ で，別の粒子族を記述する表現が σ のとき，それらの粒子族によって構成される複合粒子族は，テンソル積表現 $\rho \otimes \sigma$ の既約分解に現れる表現によって記述される．

V_λ に属するどのベクトル $\boldsymbol{v}$ も，同時固有方程式

$$\rho(H_k)\boldsymbol{v} = \lambda(H_k)\boldsymbol{v} \quad (k = 1, \cdots, r) \tag{7.78}$$

を満足し，$\rho(H_j), \rho(H_k)$ $(j \neq k)$ は可換なことから，[IV]の要請は妥当である．

これより Cartan 部分代数の物理的意味がわかる．次に，$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ を $\mathfrak{h}$ に関するルートの基本系とするならば，$H_1, \cdots, H_r$ は $H_{\alpha_1}, \cdots, H_{\alpha_r}$ の 1 次結合で表わされ，

$$\lambda(H_{\alpha_k}) = (\lambda, \alpha_k) \quad (k = 1, \cdots, r) \tag{7.79}$$

が成り立つので，各 $\lambda(H_k)$ は (λ, α_1), $\cdots$, (λ, α_r) の 1 次結合で表わされることになる．こうしてウェイトと基本ルートとの内積 (λ, α_k) は，基本的な情報となっていることがわかるので，ウェイトの図形は物理的にも重要である．

さて強い相互作用をする素粒子 (ハドロンと呼ばれる) は，種々の実験的根拠より，次の性質をもつ，**クォーク** (quark) と呼ばれる基本粒子から構成された複合粒子であるとされている．

表 7.4　クォーク一覧

	名称	世代	質量[*8]	スピン	電荷	S	C	B	T	重粒子数
u	up	I	1.5〜3.3 MeV	1/2	2/3	0	0	0	0	1/3
d	down		3.5〜6.0 MeV	1/2	−1/3	0	0	0	0	1/3
c	charm	II	$1.27^{+0.07}_{-0.11}$ GeV	1/2	2/3	0	1	0	0	1/3
s	strange		104^{+26}_{-34} MeV	1/2	−1/3	−1	0	0	0	1/3
t	top	III	171.2±2.1 GeV	1/2	2/3	0	0	0	1	1/3
b	bottom		$4.20^{+0.17}_{-0.07}$ GeV	1/2	−1/3	0	0	−1	0	1/3

ここに，S, C, B, T はそれぞれ奇妙さ，チャーム数，ボトム数，トップ数と呼ばれる加法的量子数で，強い相互作用で保存される．**西島–Gell-Mann の法則**は，N を重粒子数として

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(N + S + C + B + T) \tag{7.80}$$

と拡張される．u, d は質量がほぼ等しいので，荷電 2 重項をなして u は $I_3 = 1/2$ を，d は $I_3 = -1/2$ をもつとする．他のクォークは荷電単一項とする．

ここでは，$C = B = T = 0$ のハドロンに限って対称性を考察する．$Y = N + S$ は**超電荷** (hyper-charge) と呼ばれるが，これを用いると，式 (7.80) は今の場合，

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y \tag{7.81}$$

*8　Particle Physics Booklet, July 2008, Particle Data Group, LBLN and CERN による．

となる．u, d, s の超電荷はそれぞれ 1/3, 1/3, −2/3 である．これらのクォークを $\mathfrak{sl}(3,\mathbf{C})$ の基本 3 次元表現 $D^3(1,0)$ に割当てよう．その妥当性を検討する．その表現の最高ウェイトは$\omega=(2\alpha_1+\alpha_2)/3$ で，式 (7.70) によって各ウェイトと α_1 および α_2 との内積を計算すると，下表のようになる．

ウェイト	α_1	α_2
ω	1/2	0
$\omega-\alpha_1$	−1/2	1/2
$\omega-\alpha_1-\alpha_2$	0	−1/2

α_1 と直交するベクトルとして $(2/3)(\alpha_1+2\alpha_2)$ をとり，ω, $\omega-\alpha_1$, $\omega-\alpha_1-\alpha_2$ との内積を計算すると，1/3, 1/3, −2/3 が得られる．これは u, d, s の超電荷と一致している．こうしてこれらのクォークを次のように各ウェイトに割当てることができる．

表 7.5　クォーク 3 重項：$D^3(1,0)$　最高ウェイト $\omega=(2\alpha_1+\alpha_2)/3$

基底	ウェイト	α_1	α_2	$(2/3)(\alpha_1+2\alpha_2)$
u	ω	1/2	0	1/3
d	$\omega-\alpha_1$	−1/2	1/2	1/3
s	$\omega-\alpha_1-\alpha_2$	0	−1/2	−2/3

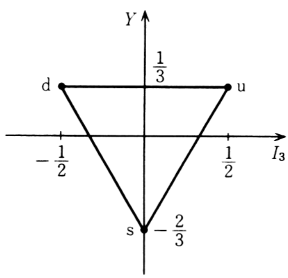


図 7.10

これからまた，I_3 と超電荷 Y に対応する $\mathfrak{sl}(3,\mathbf{C})$ の元がそれぞれ

$$H_{\alpha_1},\quad (2/3)(H_{\alpha_1}+2H_{\alpha_2})$$

であることがわかる．以後簡単のため，$H_{\alpha_j}, E_{\alpha_{\pm k}}$ をそれぞれ $H_j, E_{\pm k}$ と略記する．$D^3(1,0)$ の表現の写像を ρ_3 と記すならば，表 7.5 により，u, d, s は

$$\begin{aligned} &\rho_3(H_1)\mathrm{u} = \frac{1}{2}\mathrm{u}, \quad \rho_3(H_1)\mathrm{d} = -\frac{1}{2}\mathrm{u}, \quad \rho_3(H_1)\mathrm{s} = 0 \\ &\rho_3(H_2)\mathrm{u} = 0, \qquad \rho_3(H_2)\mathrm{d} = \frac{1}{2}\mathrm{d}, \qquad \rho_3(H_2)\mathrm{s} = -\frac{1}{2}\mathrm{s} \end{aligned} \tag{7.82}$$

をみたす．ところが§7.7で調べたようにρ_3は恒等表現であるから，u, d, s をその表現空間 $\mathbf{C}^3$ において

$$\mathrm{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.83}$$

ととることができる．このとき，$E_{\pm k}$ $(k = 1, 2, 3)$ の u, d, s に対する作用は，表7.6のようになる．

表 7.6 クォーク3重項に対する Weyl の基底の作用

	u	d	s
$\rho_3(E_{-1})$	$\mathrm{d}/\sqrt{2}$	0	0
$\rho_3(E_{-2})$	0	$\mathrm{s}/\sqrt{2}$	0
$\rho_3(E_{-3})$	$\mathrm{s}/\sqrt{2}$	0	0
$\rho_3(E_1)$	0	$\mathrm{u}/\sqrt{2}$	0
$\rho_3(E_2)$	0	0	$\mathrm{d}/\sqrt{2}$
$\rho_3(E_3)$	0	0	$\mathrm{u}/\sqrt{2}$

この表は式(7.45)と整合している．また予告したように，$E_{\pm 1}$ が荷電スピンの上昇・下降の作用に対応していることがわかる．

反クォーク $\bar{\mathrm{u}}, \bar{\mathrm{d}}, \bar{\mathrm{s}}$ は反傾表現 $D^3(0,1)$ に割当てられるので，そのウェイトとの対応は表7.7のようになっている．

表 7.7 反クォーク3重項：$D^3(0,1)$　最高ウェイト $\omega' = (\alpha_1 + 2\alpha_2)/3$

基底	ウェイト	α_1	α_2	$(2/3)(\alpha_1 + 2\alpha_2)$
$\bar{\mathrm{s}}$	ω'	0	1/2	2/3
$\bar{\mathrm{d}}$	$\omega' - \alpha_2$	1/2	−1/2	−1/3
$\bar{\mathrm{u}}$	$\omega' - \alpha_1 - \alpha_2$	−1/2	0	−1/3

$\bar{\mathrm{u}}, \bar{\mathrm{d}}, \bar{\mathrm{s}}$ を u, d, s の双対基底にとるならば，反傾表現 $\bar{\rho}_3$ の $\bar{\mathrm{u}}, \bar{\mathrm{d}}, \bar{\mathrm{s}}$ に関する行列表示は ρ_3 のそれの転置の -1 倍に等しいから，ただちに表7.8が得られる．

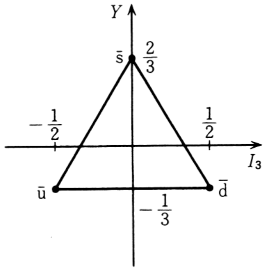


図 7.11

表 7.8 反クォーク 3 重項に対する Weyl の基底の作用

	$\overline{\mathrm{u}}$	$\overline{\mathrm{d}}$	$\overline{\mathrm{s}}$
$\overline{\rho}_3(E_{-1})$	0	$-\overline{\mathrm{u}}/\sqrt{2}$	0
$\overline{\rho}_3(E_{-2})$	0	0	$-\overline{\mathrm{d}}/\sqrt{2}$
$\overline{\rho}_3(E_{-3})$	0	0	$-\overline{\mathrm{u}}/\sqrt{2}$
$\overline{\rho}_3(E_1)$	$-\overline{\mathrm{d}}/\sqrt{2}$	0	0
$\overline{\rho}_3(E_2)$	0	$-\overline{\mathrm{s}}/\sqrt{2}$	0
$\overline{\rho}_3(E_3)$	$-\overline{\mathrm{s}}/\sqrt{2}$	0	0

以上で計算のための基礎的データが揃った．クォークの二体系 $\mathrm{q}\overline{\mathrm{q}}$ にはスピンが 0 のものと 1 のものとが生ずるので，前者には擬スカラー中間子族をあて，後者にはベクトル中間子族をあてる．三体系 qqq にはスピンが 1/2 のものと 3/2 のものとが生ずるので，該当する重粒子族をあてる．次に，クォークにあてた表現のテンソル積をつくり既約分解する．

$$D^3(1,0)\otimes D^3(0,1)=D^1(0,0)\oplus D^8(1,1) \tag{7.84}$$

$$D^3(1,0)\otimes D^3(1,0)\otimes D^3(1,0)=D^1(0,0)\oplus D^8(1,1)\oplus D^8(1,1)\oplus D^{10}(2,0) \tag{7.85}$$

よって，擬スカラー中間子族のうち K,π,η を 8 次元表現に，η' を 1 次元表現に割当てる．次に，$J^P=(1/2)^+$ の重粒子族は 8 次元表現に，$J^P=(3/2)^+$ の重粒子族は 10 次元表現に割当てる．この妥当性は表 7.9, 7.10 からわかる．式 (7.85) に 8 次元表現が 2 回現れているが，この意味については後述する．8 次元表現は随伴表現であることに注意しよう．そのウェイトはルートとなる．

表 7.9　$D^8(1,1)$　最高ウェイト $= \alpha_1 + \alpha_2$

		ルート	α_1	α_2	$(2/3)(\alpha_1+2\alpha_2)$
K^+	p	$\alpha_1+\alpha_2$	$1/2$	$1/2$	1
K^0	n	α_2	$-1/2$	1	1
π^+	Σ^+	α_1	1	$-1/2$	0
$\pi^0\ \eta$	$\Sigma^0\ \Lambda$	0	0	0	0
π^-	Σ^-	$-\alpha_1$	-1	$1/2$	0
K^0	Ξ^0	$-\alpha_2$	$1/2$	-1	-1
K^-	Ξ^-	$-\alpha_1-\alpha_2$	$-1/2$	$-1/2$	-1
			I_3		Y

便宜上，重粒子と中間子を同じ表に書き込んだが，どのルートに対応しているか，また量子数が適合しているかを見るためである．表現空間は違うことに注意せよ．

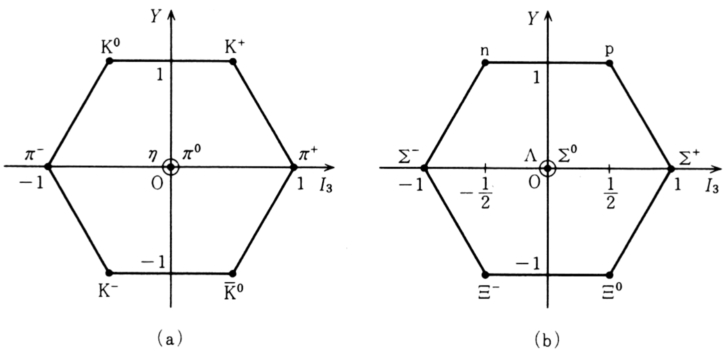


図 7.12　(a) 擬スカラー中間子 8 重項　(b) $J^P = (1/2)^+$ 重粒子 8 重項

今度は擬スカラー中間子のなす基底ベクトルをクォークの二体系 $q \otimes \bar{q}$ で構成しよう．表 7.7, 7.8, 7.9 からわかるように，ウェイト $\omega + \omega' = \alpha_1 + \alpha_2$ に対応するベクトルはスカラー倍を除けば $u \otimes \bar{s}$ しかないので，$K^+ = u \otimes \bar{s}$ と定める．残りの基底ベクトルは，$D^8(1,1)$ の表現の写像を ρ_8 とするとき，

$$\rho_8 = \rho_3 \otimes I + I \otimes \bar{\rho}_3 \tag{7.86}$$

であるから，表 7.6, 7.7 と式 (7.44) を用いて決めることができる．結果は下記の通りである．記号 $\otimes$ は簡単のため省略した．

$$\begin{aligned}&\mathrm{K}^+=\mathrm{u\bar{s}},\quad \mathrm{K}^0=\mathrm{d\bar{s}},\quad \pi^+=\mathrm{u\bar{d}},\quad \pi^0=(\mathrm{u\bar{u}}-\mathrm{d\bar{d}})/\sqrt{2}\\&\mathrm{K}^-=\mathrm{s\bar{u}},\quad \mathrm{K}^0=\mathrm{s\bar{d}},\quad \pi^-=\mathrm{d\bar{u}},\quad \eta=(\mathrm{u\bar{u}}+\mathrm{d\bar{d}}-2\mathrm{s\bar{s}})/\sqrt{6}\end{aligned} \tag{7.87}$$

零ルート空間には π^0 と η の二つの 1 次独立なベクトルが存在するが，π^0 は荷電 3 重項に属することから，$\rho_8(E_{-1})\pi^+=-\pi^0$ となるように決めた．η の方は式 (7.44) と $\rho_8(E_{-3})\mathrm{K}^+$ が零ルート空間に属すること，η が荷電単一項なので，$\rho_8(E_{\pm 1})\eta=0$ をみたすことの二条件から決めた．

次は重粒子 8 重項の構成に移る．この場合は同じ 8 次元であっても，三つの $D^3(1,0)$ の直積の既約成分であるから，

$$\rho_8=\rho_3\otimes I\otimes I+I\otimes\rho_3\otimes I+I\otimes I\otimes\rho_3 \tag{7.88}$$

であることに注意しよう．8 次元表現の最高ウェイトは $\alpha_1+\alpha_2$ に等しい，3 次元表現のウェイトの組合せは，$\omega+\omega+(\omega-\alpha_1)$ しかないので，p は u, u, d から構成される．したがって最も一般的な組合せは

$$\mathrm{p}=a\,\mathrm{uud}+b\,\mathrm{udu}+c\,\mathrm{duu}$$

である．しかるに p は最高ウェイトのウェイト空間に属するのだから，これに $\rho_8(E_k)$ $(k=1,2,3)$ を作用させると 0 とならなければならない．したがって係数 a,b,c の間には

$$a+b+c=0$$

の関係があることになる．よって

$$\mathrm{p}=a(\mathrm{uud}-\mathrm{duu})+b(\mathrm{udu}-\mathrm{duu})$$

となり，1 次独立なベクトル uud − duu, udu − duu の二つが得られる．このことは既約分解 (7.83) において 8 次元表現が二回現れていることに対応している．ここでは udu − duu とそれに直交する 2uud − udu − duu を採用し，正規化しておく．残りの重粒子は中間子の場合と同じやり方で，次のように決まる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p} &= (\mathrm{udu} - \mathrm{duu})/\sqrt{2} \\
\mathrm{n} &= (\mathrm{udd} - \mathrm{dud})/\sqrt{2} \\
\Sigma^+ &= (\mathrm{usu} - \mathrm{suu})/\sqrt{2} \\
\Sigma^0 &= (\mathrm{sdu} + \mathrm{sud} - \mathrm{dsu} - \mathrm{usd})/2 \\
\Sigma^- &= (\mathrm{sdd} - \mathrm{dsd})/\sqrt{2} \\
\Xi^0 &= (\mathrm{uss} - \mathrm{sus})/\sqrt{2} \\
\Xi^- &= (\mathrm{dss} - \mathrm{sds})/\sqrt{2} \\
\Lambda &= (2\mathrm{uds} - 2\mathrm{dus} + \mathrm{sud} - \mathrm{usd} + \mathrm{sdu} - \mathrm{dsu})/\sqrt{12}
\end{aligned}
\tag{7.89}
$$

もう一組の方は次のように決まる.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p} &= (2\mathrm{uud} - \mathrm{udu} - \mathrm{duu})/\sqrt{6} \\
\mathrm{n} &= (\mathrm{dud} + \mathrm{udd} - 2\mathrm{ddu})/\sqrt{6} \\
\Sigma^+ &= (2\mathrm{uus} - \mathrm{usu} - \mathrm{suu})/\sqrt{6} \\
\Sigma^0 &= (\mathrm{usd} + \mathrm{sud} + \mathrm{dsu} + \mathrm{sdu} - 2\mathrm{uds} - 2\mathrm{dus})/\sqrt{12} \\
\Sigma^- &= (\mathrm{dsd} + \mathrm{sdd} - 2\mathrm{dds})/\sqrt{6} \\
\Xi^0 &= (\mathrm{sus} + \mathrm{uss} - 2\mathrm{ssu})/\sqrt{6} \\
\Xi^- &= (\mathrm{sds} + \mathrm{dss} - 2\mathrm{ssd})/\sqrt{6} \\
\Lambda &= (\mathrm{usd} + \mathrm{sud} - \mathrm{dsu} - \mathrm{sdu})/2
\end{aligned}
\tag{7.90}
$$

(7.89) の構成の方は前の二つのクォークの入れ替えに対して反対称であり, (7.90) の方は対称である. ここでクォークの色の自由度に触れるべきであるが, 紙幅が許さない. 巻末の参考書 [3], [65], [66] などを参照.

10 重項の重粒子については, 10 次元表現の最高ウェイト $2\alpha_1 + \alpha_2$ は 3 次元基本表現の最高ウェイト ω の 3 倍になっているので, $2\alpha_1 + \alpha_2$ に対応するウェイトベクトルは 1 次独立なものを除いては uuu しかない. よってこれを Δ^{++} と定める. 残りの基底は前と同じく, $\rho_{10}(E_{-k})$ $(k = 1, 2, 3)$ を用いることによって

表 7.10　$D^{10}(3,0)$　最高ウェイト $= 2\alpha_1 + \alpha_2$

基底	ウェイト	α_1	α_2	$(2/3)(\alpha_1 + 2\alpha_2)$
Δ^{++}	$2\alpha_1 + \alpha_2$	$3/2$	0	1
Δ^{+}	$\alpha_1 + \alpha_2$	$1/2$	$1/2$	1
Δ^{0}	α_2	$-1/2$	1	1
Δ^{-}	$-\alpha_1 + \alpha_2$	$-3/2$	$3/2$	1
Σ^{*+}	α_1	1	$-1/2$	0
Σ^{*0}	0	0	0	0
Σ^{*-}	$-\alpha_1$	-1	$1/2$	0
Ξ^{*0}	$-\alpha_2$	$1/2$	-1	-1
Ξ^{*-}	$-\alpha_1 - \alpha_2$	$-1/2$	$-1/2$	-1
Ω^{-}	$-\alpha_1 - 2\alpha_2$	0	$-3/2$	-2
		I_3		Y

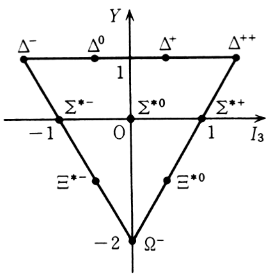


図 7.13　$J^P = (3/2)^+$ 重粒子 10 重項

$$
\begin{aligned}
\Delta^{++} &= \mathrm{uuu} \\
\Delta^{+} &= (\mathrm{duu} + \mathrm{udu} + \mathrm{uud})/\sqrt{3} \\
\Delta^{0} &= (\mathrm{ddu} + \mathrm{dud} + \mathrm{udd})/\sqrt{3} \\
\Delta^{-} &= \mathrm{ddd} \\
\Sigma^{*+} &= (\mathrm{uus} + \mathrm{usu} + \mathrm{suu})/\sqrt{3} \\
\Sigma^{*0} &= (\mathrm{uds} + \mathrm{dus} + \mathrm{usd} + \mathrm{dsu} + \mathrm{sud} + \mathrm{sdu})/\sqrt{6} \\
\Sigma^{*-} &= (\mathrm{dds} + \mathrm{dsd} + \mathrm{sdd})/\sqrt{3} \\
\Xi^{*0} &= (\mathrm{uss} + \mathrm{sus} + \mathrm{ssu})/\sqrt{3} \\
\Xi^{*-} &= (\mathrm{dss} + \mathrm{sds} + \mathrm{ssd})/\sqrt{3} \\
\Omega^{-} &= \mathrm{sss}
\end{aligned}
\tag{7.91}
$$

と決められる．

以上で，$J^P = (1/2)^+$ および $(3/2)^+$ の重粒子そして擬スカラー中間子を $\mathfrak{su}(3)$ の既約表現にぴたりと割当てることができ，クォークによって構成することができた．u, d, s が基本 3 次元表現の超多重項をなすこと，荷電スピンの第三成分と超電荷が Cartan 部分代数の基底に対応する保存量であることが，本質的である．これらの粒子は図 7.12, 7.13 で見たように，(I_3, Y) を座標としてそれぞれウェイト図形に配列されるが，自然はその美しさの一部を Lie 代数を通して現したということができる．

演習問題

7.1

(i) Lie 群 G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とする．$X, Y \in \mathfrak{g}$ および $s, t \in \mathrm{R}$ に対して

$$\exp[tX]\exp[sY]\exp[-tX] = \exp\Big\{s\exp[t\,\mathrm{ad}(X)]Y\Big\}$$

を確かめよ (演習問題 5.4 を参照).

(ii) 定理 7.2 を証明せよ．($Y \in \mathfrak{h}$ なら (i) の左辺は H に属し $\exp[t\,\mathrm{ad}(X)]Y \in \mathfrak{h}$)

7.2 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底を $\{E_1, \cdots, E_n\}$ とする．$X = x^i E_i$ とし

$$\mathrm{ad}(X)E_j = x^i[E_i, E_j] = x^i c_{ij}{}^k E_k$$

を基底の線形変換とみれば，変換行列は $\Big(\mathrm{ad}(X)\Big)_{kj} = x^i c_{ij}{}^k$ と書ける．$Y = y^j E_j$ とし

$$\Big(\mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)\Big)_{mj} = \Big(\mathrm{ad}(Y)\Big)_{mk}\Big(\mathrm{ad}(X)\Big)_{kj}$$

を確かめよ．標語的に言えば：ad の積の行列は，ad の行列の積に等しい．

7.3 Lie 代数の基底 $\{E_i\}$ を行列 S ($\det S \neq 0$) で変換し $\{F_\mu = S^i_\mu E_i\}$ とする．Killing 形式 $B(X, Y)$ は，基底の変換で不変なことを示せ．すなわち，$X = x^i E_i$ として計算しても，$X = \xi^\mu F_\mu$ として計算しても同じ値になることを示せ．

7.4 $\mathfrak{g}$ を K 上の分離的半単純 Lie 代数とし，その分離的 Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ に関するルート系を Δ とする．Δ の任意の元 α に対して，ルート空間 $\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}$ からそれぞれ元 $E_\alpha, E_{-\alpha}$ を $B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ が成り立つように選び，次に $n\alpha$ がルートであるような自然数 n の最大値を p とし，$\mathfrak{a} = \mathrm{K}E_{-\alpha} + \mathrm{K}H_\alpha + \sum_{n=1}^{p} \mathfrak{g}_{n\alpha}$ とおく．

(i) $\mathfrak{a}$ は $\mathrm{ad}(E_{-\alpha}), \mathrm{ad}(E_\alpha), \mathrm{ad}(H_\alpha)$ に関して不変な部分空間であることを示せ．

(ii) $\mathrm{ad}(H_\alpha)|_{\mathfrak{a}}$ のトレースを計算して定理 7.9 の (ii), (iii) を証明せよ．(その定理の (iv), (v) は用いてよい．)

7.5 分離的でない Lie 代数の例に $\mathfrak{su}(3)$ をとって，Lie 代数の表現をつくる本文の筋書きを，Gell-Mann の処方と対比しつつ，試してみよう (本文の p.219 以下を参照)．$\mathfrak{su}(3)$ は $\mathrm{tr}\, X = 0$ で交代 Hermite な 3×3 行列 X のなす Lie 代数である．その基底を次の Gell-Mann 行列 λ_i を用いた $F_k = -\mathrm{i}\lambda_k/2$ にとろう．

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

以下の (i)–(xi) を確かめ，その手続きにならって (xii) を解け．

(i) F_k は交換関係 $[F_k, F_l] = f_{kl}{}^m F_m$ に従う．構造定数 $f_{kl}{}^m$ は，すべて実数 ($\mathfrak{su}(n)$ は実 Lie 代数!)，k, l, m に関して完全反対称で，0 でない成分は表 1 のとおりである．ただし，$f_{21}{}^3 = -1$ なども読みとる．

表 1 $\mathfrak{su}(3)$ の構造定数

i	j	k	$f_{ij}{}^k$	i	j	k	$f_{ij}{}^k$
1	2	3	1	3	4	5	1/2
1	4	7	1/2	3	6	7	−1/2
1	5	6	−1/2	4	5	8	$\sqrt{3}/2$
2	4	6	1/2	6	7	8	$\sqrt{3}/2$
2	5	7	1/2				

(ii) Cartan 計量は $g_{ij} = -3\delta_{ij}$.

(iii) Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ は F_3, F_8 の二つから生成されるので $\mathfrak{su}(3)$ の階数は $r = 2$

である．ルートを実数にするため複素化をして $H_1 = \mathrm{i}F_3$, $H_2 = \mathrm{i}F_8$ にとる．$\mathrm{ad}(H_l)$ $(l=1,2)$ の行列表示は，それぞれ $\mathrm{i}f_{kl}{}^m$ $(k=3,8)$ で与えられる：

$$
(f_{3l}{}^m) = \overset{\longrightarrow\, l}{\underset{m}{\downarrow}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & & & O \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & -1/2 & & & \\ & & & 1/2 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & 1/2 & \\ & & & & & -1/2 & 0 & \\ O & & & & & & & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
(f_{8l}{}^m) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & O \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & -\sqrt{3}/2 & & & \\ & & & \sqrt{3}/2 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & -\sqrt{3}/2 & \\ & & & & & \sqrt{3}/2 & 0 & \\ O & & & & & & & 0 \end{pmatrix}
$$

固有値問題 (7.21) は，連立方程式

$$
\mathrm{ad}(H_1)E_\lambda = \lambda^1 E_\lambda, \quad \mathrm{ad}(H_2)E_\lambda = \lambda^2 E_\lambda
$$

にほかならず (X を E_λ とおいた)，ルート・ベクトルは $\lambda(H) = (\lambda^1, \lambda^2)$ としてよい．$E_\lambda = x^j F_j$ とおけば $f_{3j}{}^k x^j = \lambda^1 x^k$, など．その解は，表2と図7.14のとおり．

表2 ad(H) の固有値問題の解 (複号同順)

λ	ルート λ	固有ベクトル E_λ
$\pm\alpha$	$(\pm 1/2, \pm\sqrt{3}/2)$	$(0,0,0,1,\pm\mathrm{i},0,0,0)$
$\pm\beta$	$(\pm 1/2, \mp\sqrt{3}/2)$	$(0,0,0,0,0,1,\mp\mathrm{i},0)$
$\pm\gamma$	$(\mp 1, 0)$	$(1,\mp\mathrm{i},0,0,0,0,0,0)$

(iv) (7.27) による H_λ の定義は，$\lambda(H_1) = \lambda^1$, $\lambda(H_2) = \lambda^2$ から

$$
B_{\mathfrak{h}}(H_1, H_\lambda) = \lambda^1, \quad B_{\mathfrak{h}}(H_2, H_\lambda) = \lambda^2
$$

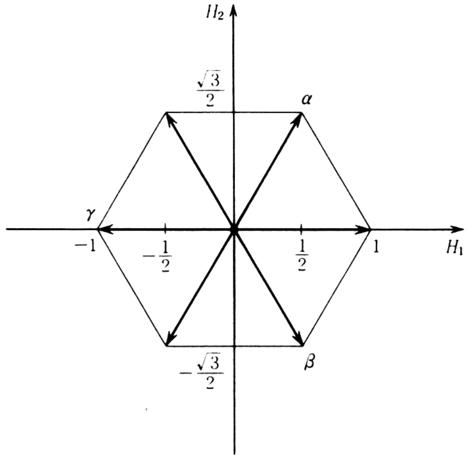


図 7.14

となり，(ii) で定めた Cartan 計量により $B(F_i, F_j) = g_{ij}$ なので

$$H_\alpha = \frac{\mathrm{i}}{6}F_3 + \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}F_8, \quad H_\beta = \frac{\mathrm{i}}{6}F_3 - \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}F_8, \quad H_\gamma = -\frac{\mathrm{i}}{3}F_3$$

ととる．H_γ の負号は表 2 の γ の命名にすでに用いた．(7.28) により

$$(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta) = (\gamma, \gamma) = \frac{1}{3}.$$

(v) したがって，(7.29) は $\overline{H}_\lambda = 6H_\lambda$ となり

$$\overline{H}_\alpha = \mathrm{i}(F_3 + \sqrt{3}F_8), \quad \overline{H}_\beta = \mathrm{i}(F_3 - \sqrt{3}F_8), \quad \overline{H}_\gamma = -2\mathrm{i}F_3.$$

(vi) 固有ベクトル E_λ は

$$E_{\pm\alpha} = \mathrm{i}F_4 \mp F_5, \quad E_{\pm\beta} = \mathrm{i}F_6 \pm F_7, \quad E_{\pm\gamma} = \mathrm{i}F_1 \pm F_2$$

である．ただし，(7.29) の上に述べた規格化条件 $B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 2/(\alpha, \alpha)$ を考慮した．

(vii) 標準基底の交換関係 (7.30) が成り立っている．

(viii) ルートの基本系は，定義 7.9 により $\Pi = (\alpha, \beta)$ と定まる．$\langle \alpha, \beta \rangle = -1$ で Dynkin 図形は A_2，Cartan 行列は，例 7.15 の A_2 のそれとなる．

(ix) ウェイトの基本系は，(7.49) により

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{3}(2\alpha+\beta)\\ \omega_2 &= \frac{1}{3}(\alpha+2\beta)\end{aligned}\right\} = \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

(x)　最高ウェイトと，それに対応する表現の次元数 N は例 7.19 に与えられている．$m_1 = 1$, $m_2 = 0$ の基本表現をとると，最高ウェイトは $\omega = \omega_1$. その表現 $D^3(1,0)$ の他のウェイトは例 7.19 の下に示した方法で求められ，ウェイト図は図 7.15 (a) となる．同様にして，基本表現 $D^3(0,1)$ のルート図は図 7.15 (b) となる．

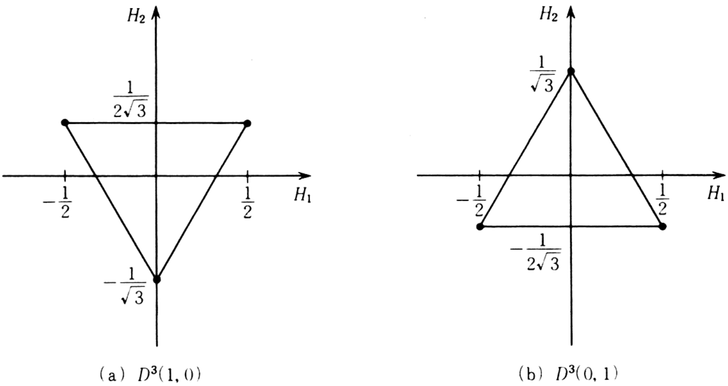


図 7.15

(xi)　図 7.15 (a) の各ウェイトは $(H_1, H_2) = (\mathrm{i}F_3, \mathrm{i}F_8)$ の固有値である．それぞれに同時固有ベクトルが対応していて，E_α, E_βにより動く．行列 E_α, E_βを知らなくても，動きは (7.45) によって計算されるので，これから行列をつくることができる．これが表現の構成である．

(xii)　$D^6(2,0)$, $D^6(0,2)$ の表現を構成せよ．後者は前者の反傾表現．

7.6　$\mathfrak{su}(2)$ の表現を三つ構成せよ．

7.7　$\mathfrak{su}(3)$ の随伴表現 $D^8(1,1)$ の構成．(7.86) 式で与えられる随伴表現 ρ_8 を用いて$\rho_8(H_1)$, $\rho_8(H_2)$, $\rho_8(E_{\pm1})$, $\rho_8(E_{\pm2})$, $\rho_8(E_{\pm3})$ の，(7.87) 式で定義される基底 $\mathrm{K}^+, \mathrm{K}^0, \pi^+, \pi^0, \pi^-, \overline{\mathrm{K}}^0, \mathrm{K}^-, \eta$ に対する作用を書き下せ．例えば，$\rho_8(H_1)\mathrm{K}^+ = \frac{1}{2}\mathrm{K}^+, \rho_8(E_{-1})\mathrm{K}^+ = \frac{1}{2}\mathrm{K}^0$など．

7.8　A_2型 ($\mathfrak{su}(3)$, $\mathfrak{sl}(3,\mathbf{C})$ など) の場合，積表現 $D^3(1,0)\otimes D^3(1,0)$ の既約分解

は $D^6(2,0) \oplus D^3(0,1)$ であることを確かめよ．もう一度 $D^3(1,0)$ をかけて

$$D^6(2,0) \otimes D^3(1,0) = D^{10}(3,0) \oplus D^8(1,1),$$
$$D^3(0,1) \otimes D^3(1,0) = D^1(0,0) \oplus D^8(1,1)$$

となることを示せ．

7.9 ルートは随伴表現のウェイトである．$\mathfrak{su}(3)$ のルート $\alpha + 2\beta$ は (7.49) により表現 $D^{10}(3,0)$ を与える．ウェイト図を描き，表現行列をつくれ．

7.10 V を K 上の線形空間 (K = C または R) とするとき，V 上で定義された K の値をとるすべての線形写像の集合 V′ を考察する．これは写像の通常の和およびスカラー倍の意味でまた K 上の線形空間をなすがこれを V の**双対空間** (dual space) という．V が n 次元の場合は，$(v_1, \cdots, v_n)$ を V の基底とするとき，$f_i(v_j) = \delta_{ij}(i,j = 1, \cdots, n)$ を満足する n 個の V′ の元 $f_1, \cdots, f_n$ が存在し，V′ の基底となる．したがって，V′ は n 次元である．$(f_1, \cdots, f_n)$ を $(v_1, \cdots, v_n)$ の**双対基底** (dual basis) という．さて，A を V から V への線形写像とする．V′ の任意の元 f に対して

$$g(v) := f(Av) \qquad (\forall v \in \mathrm{V}) \tag{7.92}$$

によって写像 $g : \mathrm{V} \to \mathrm{K}$ を定義するならば，g は線形すなわち V′ の元である．g は f によって定まるので，f に g を対応させる写像を考察するならば，容易にわかるように，これは V′ から V′ への線形写像である．これを A の**転置写像** (transposed mapping) といって，A^{t} と記す．

$$(A^{\mathrm{t}}f)(v) = f(Av) \qquad (\forall f \in \mathrm{V}', \ \forall v \in \mathrm{V}) \tag{7.93}$$

転置写像は転置行列に対応する．

(i) V の基底 $(v_1, \cdots, v_n)$ に関する A の行列表示を (a_{ij}) とし，その双対基底 $(f_1, \cdots, f_n)$ に関する A^{t} の行列表示を (b_{ij}) とするとき，$a_{ij} = b_{ij}\,(i,j = 1, \cdots, n)$ の関係が成り立つことを示せ．

(ii) B を V から V へのもう一つの線形写像とするとき，次の公式が成り立つことを示せ．

(a) $(\alpha A + \beta B)^{\mathrm{t}} = \alpha A^{\mathrm{t}} + \beta B^{\mathrm{t}}$

(b) $(AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}$

次に，(ρ, V) を Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現とする．

$$\sigma(X) := -\{\rho(X)\}^{\mathrm{t}} \qquad (\forall X \in \mathfrak{g})$$

によって写像 $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathrm{V}')$ を定義すれば，σ は $\mathfrak{g}$ の V′ 上の表現となるが，これを ρ の**反傾表現** (contragredient representation) といい，$\overline{\rho}$ と記す．

(iii)　$\bar{\rho}$ が $\mathfrak{g}$ の V′上の表現であることを確かめよ．

(iv)　反傾表現 $\bar{\rho}$ の反傾表現は ρ と同値になることを証明せよ．

(v)　$\bar{\rho}$ が既約となるための必要十分条件は，ρ が既約なことである．これを証明せよ．

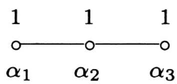
7.11　階数が一般の r の場合のルートの基本系を $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ とし，それに関するウェイトの基本系を $\{\omega_1, \cdots, \omega_r\}$ とする．これを用いて $\mu(m_1, \cdots, m_r) := m_1\omega_1 + \cdots + m_r\omega_r$ と書くことにする．$\{m_1, \cdots, m_r\}$ は Dynkin 指数．

(i)　$\langle \omega_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ であることを示せ．

(ii)　$\langle \mu(m_1, \cdots, m_r) - k\alpha_i, \alpha_j \rangle = m_j - ka_{ij}$ が成り立つことを示せ．ここに a_{ij} は Cartan 行列の (i, j) 要素．

(iii)　A_2 型の場合 ($\mathfrak{su}(3)$, $\mathfrak{sl}(3,\mathbf{C})$ など)，$\alpha := \alpha_1$，$\beta := \alpha_2$ と書き換えて，前問の処方を Dynkin 指数の言葉で述べよ．

7.12　A_3 型の Lie 代数 ($\mathfrak{su}(4), \mathfrak{sl}(4, \mathbf{C})$ など) の Dynkin 図形は



で与えられる．

(i)　ルート系を構成せよ．

(ii)　既約表現 $D^N(m_1, m_2, m_3)$ の次元 N は

$$N = \frac{1}{12}(m_1+1)(m_2+1)(m_3+1)(m_1+m_2+2)(m_2+m_3+2) \times(m_1+m_2+m_3+3)$$

で与えられることを示せ．

(iii)　積表現 $D^{15}(1,0,1) \otimes D^{15}(1,0,1)$ を既約分解せよ．

7.13　ベクトル中間子 ($JP = 1^-$) をクォーク u, d, s から構成せよ．ただし (7.84) 式の既約分解の中の，1 次元表現の基底を φ_0 とし，8 次元表現の中の単一項を ω_0 として，実際の φ, ω はこれらの直交変換による混合である．その直交変換を適当にとれば，$\varphi = \mathrm{s}\bar{\mathrm{s}}$ にできることを示せ．そのとき ω はどうなるか．こうすれば実際の φ, ω の振舞がかなりよく説明できる．

7.14　$\mathfrak{o}(n, \mathrm{C}), \mathfrak{o}(n)$ $(n \geqq 3)$ の Killing 形式を求める．(i, j) 要素が 1，他の要素は 0 の $n \times n$ 行列を E_{ij} とし，$X = (x_{ij})$ を $\mathfrak{o}(n, \mathrm{C})$ または $\mathfrak{o}(n)$ の元とする．

(i)　次式を証明せよ．

$$X^2(E_{ij}-E_{ji})+(E_{ij}-E_{ji})X^2=\sum_{l=1}^{n}(X^2)_{li}(E_{lj}-E_{jl})+\sum_{l=1}^{n}(X^2)_{jl}(E_{il}-E_{li})$$

$$X(E_{ij}-E_{ji})X=\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}x_{il}x_{jm}(E_{ml}-E_{lm})$$

(ii) $E_{ij}-E_{ji}$が $\mathfrak{o}(n,\mathrm{C}),\mathfrak{o}(n)$ の基底をなすことを利用して $\mathrm{M}(n,\mathrm{C})$ における線形変換

$$Z\longmapsto X^2Z+ZX^2,\quad Z\longmapsto XZX$$

のトレースがそれぞれ $(n-1)\mathrm{tr}\,X^2,(1/2)\mathrm{tr}\,X^2$となることを示せ．

(iii) $B(X,Y)=(n-2)\mathrm{tr}(XY)$ を導き，これが非退化なことを示せ．

7.15 n 変数 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ の関数 $\phi(x)$ に対する偏微分方程式

$$L\phi(x)=0\qquad\left(L=\sum_{i=1}^{n}v_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\tag{7.94}$$

に対して，適当な $q_j(x),\lambda(x)$ を見いだして

$$P=\sum_{j=1}^{n}q_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\quad が\quad [L,P]=\lambda(x)L\quad をみたす$$

ようにできたとする．このとき，$\phi(x)$ が (7.94) の解なら $P\phi,P^2\phi,\cdots$ も解であり

$$\psi(x)=\phi\left(\mathrm{e}^{tP}x\right)$$

もまた解であることを示せ．F は任意関数，t も任意である．

7.16 古典力学における 2 次元等方調和振動子のハミルトニアン

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2)+\frac{k^2}{2}(x^2+y^2)$$

は無限小変換 $1+\varepsilon A_l$で不変 $(A_lH=0)$ なことを確かめよ．ここに

$$A_l=\sum_{s=x,y}\left\{\frac{\partial K_l}{\partial p_s}\frac{\partial}{\partial x_s}-\frac{\partial K_l}{\partial x_s}\frac{\partial}{\partial p_s}\right\}\qquad(l=1,2,3)$$

ただし，K_lは次式で定義され，運動の定数である：

$$K_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(xp_y-yp_x),\quad K_2=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\sqrt{mk}}(p_x^2-p_y^2)+\frac{\sqrt{mk}}{2}(x^2-y^2)\right],$$

$$K_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{mk}}p_xp_y+\sqrt{mk}xy\right]$$

また，A_1,A_2,A_3は $\mathfrak{so}(3)$ に同形な Lie 代数を生成することを示せ．

付録

§A.1 古典線形群

表 A.1

名称	記号	内容
一般線形群	$\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$	$\{X \in \mathsf{M}(n,\mathsf{C});\ \det X \neq 0\}$
	$\mathrm{GL}(n,\mathsf{R})$	$\{X \in \mathsf{M}(n,\mathsf{R});\ \det X \neq 0\}$
特殊線形群	$\mathrm{SL}(n,\mathsf{C})$	$\{X \in \mathsf{M}(n,\mathsf{C});\ \det X = 1\}$
	$\mathrm{SL}(n,\mathsf{R})$	$\{X \in \mathsf{M}(n,\mathsf{R});\ \det X = 1\}$
直交群	$\mathrm{O}(n,\mathsf{C})$	$\{X \in \mathsf{M}(n,\mathsf{C});\ X^{\mathrm{t}}X = I_n\}$
	$\mathrm{O}(n)$	$\{X \in \mathsf{M}(n,\mathsf{R});\ X^{\mathrm{t}}X = I_n\}$
擬直交群	$\mathrm{O}(p,q)$	$\{X \in \mathsf{M}(p+q,\mathsf{R});\ X^{\mathrm{t}}I_{p,q}X = I_{p,q}\}$
斜交群	$\mathrm{Sp}(2m,\mathsf{C})$	$\{X \in \mathsf{M}(2m,\mathsf{C});\ X^{\mathrm{t}}J_{2m}X = J_{2m}\}$
	$\mathrm{Sp}(2m,\mathsf{R})$	$\{X \in \mathsf{M}(2m,\mathsf{R});\ X^{\mathrm{t}}J_{2m}X = J_{2m}\}$
ユニタリ群	$\mathrm{U}(n)$	$\{X \in \mathsf{M}(n,\mathsf{C});\ X^{\dagger}X = I_n\}$
擬ユニタリ群	$\mathrm{U}(p,q)$	$\{X \in \mathsf{M}(p+q,\mathsf{R});\ X^{\dagger}I_{p,q}X = I_{p,q}\}$
特殊直交群	$\mathrm{SO}(n,\mathsf{C})$	$\mathrm{SL}(n,\mathsf{C}) \cap \mathrm{O}(n,\mathsf{C})$
	$\mathrm{SO}(n)$	$\mathrm{SL}(n,\mathsf{R}) \cap \mathrm{O}(n)$
特殊擬直交群	$\mathrm{SO}(p,q)$	$\mathrm{SL}(p+q,\mathsf{R}) \cap \mathrm{O}(p,q)$
特殊ユニタリ群	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{SL}(n,\mathsf{C}) \cap \mathrm{U}(n)$
特殊擬ユニタリ群	$\mathrm{SU}(p,q)$	$\mathrm{SL}(p+q,\mathsf{C}) \cap \mathrm{U}(p,q)$
ユニタリ斜交群	$\mathrm{Sp}(2m)$	$\mathrm{U}(2m) \cap \mathrm{Sp}(2m,\mathsf{C})$

注意

(1) $\mathrm{SO}(3)$ は回転群とよばれる．

(2) I_n は n 次の単位行列であり，

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & O \\ O & -I_q \end{pmatrix}, \quad J_{2m} = \begin{pmatrix} O & I_m \\ -I_m & O \end{pmatrix}.$$

である．

(3) $\dagger$ は Hermite 共役を表わす．

§A.2 線形 Lie 代数

表 A.2

線形 Lie 群	Lie 代数	次元
$\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$	$\mathfrak{gl}(n,\mathsf{C}) = \mathsf{M}(n,\mathsf{C})$	$2n^2$
$\mathrm{GL}(n,\mathsf{R})$	$\mathfrak{gl}(n,\mathsf{R}) = \mathsf{M}(n,\mathsf{R})$	n^2
$\mathrm{SL}(n,\mathsf{C})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathsf{C}) = \{X \in \mathsf{M}(n,\mathsf{C});\ \mathrm{tr}\,(X) = 0\}$	$2(n^2-1)$
$\mathrm{SL}(n,\mathsf{R})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathsf{R}) = \{X \in \mathsf{M}(n,\mathsf{R});\ \mathrm{tr}\,(X) = 0\}$	n^2-1
$\mathrm{O}(n,\mathsf{C})$	$\mathfrak{o}(n,\mathsf{C}) = \{X \in \mathsf{M}(n,\mathsf{C});\ X^{\mathrm{t}} + X = 0\}$	$n(n-1)$
$\mathrm{O}(n)$	$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathsf{M}(n,\mathsf{R});\ X^{\mathrm{t}} + X = 0\}$	$n(n-1)/2$
$\mathrm{O}(p,q)$	$\mathfrak{o}(p,q)$	$(p+q)(p+q-1)/2$
	$= \{X \in \mathsf{M}(p+q,\mathsf{R});\ X^{\mathrm{t}} I_{p,q} + I_{p,q} X = 0\}$	
$\mathrm{Sp}(2m,\mathsf{C})$	$\mathfrak{sp}(2m,\mathsf{C})$	$2m(2m+1)$
	$= \{X \in \mathsf{M}(2m,\mathsf{C});\ X^{\mathrm{t}} J_{2m} + J_{2m} X = 0\}$	
$\mathrm{Sp}(2m,\mathsf{R})$	$\mathfrak{sp}(2m,\mathsf{R})$	$m(2m+1)$
	$= \{X \in \mathsf{M}(2m,\mathsf{R});\ X^{\mathrm{t}} J_{2m} + J_{2m} X = 0\}$	
$\mathrm{U}(n)$	$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathsf{M}(n,\mathsf{C});\ X^* + X = 0\}$	n^2
$\mathrm{U}(p,q)$	$\mathfrak{u}(p,q)$	$(p+q)(p+q-1)/2$
	$= \{X \in \mathsf{M}(p+q,\mathsf{C});\ X^{\dagger} I_{p,q} + I_{p,q} X = 0\}$	
$\mathrm{SO}(n,\mathsf{C})$	$\mathfrak{so}(n,\mathsf{C}) = \mathfrak{o}(n,\mathsf{C})$	$n(n-1)$
$\mathrm{SO}(n)$	$\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$	$n(n-1)/2$
$\mathrm{SO}(p,q)$	$\mathfrak{so}(p,q) = \mathfrak{o}(p,q)$	$(p+q)(p+q-1)/2$
$\mathrm{SU}(n)$	$\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{sl}(n,\mathsf{C}) \cap \mathfrak{u}(n)$	n^2-1
$\mathrm{SU}(p,q)$	$\mathfrak{su}(p,q) = \mathfrak{sl}(p+q,\mathsf{C}) \cap \mathfrak{u}(p,q)$	$(p+q)^2-1$
$\mathrm{Sp}(2m)$	$\mathfrak{sp}(2m) = \mathfrak{u}(2m) \cap \mathfrak{sp}(2m,\mathsf{C})$	$m(2m+1)$

注意

(1) 次元は実次元の意味.

(2) $\mathfrak{u}(n), \mathfrak{u}(p,q), \mathfrak{su}(n), \mathfrak{su}(p,q), \mathfrak{sp}(2m)$ は複素行列を要素とするけれども，複素 Lie 代数にはならないことに注意せよ.

(3) $\mathfrak{gl}(n,\mathsf{C})$, $\mathfrak{sl}(n,\mathsf{C})$, $\mathfrak{o}(n,\mathsf{C})$, $\mathfrak{sp}(2m,\mathsf{C})$ は複素 Lie 代数にもなっている. 複素次元はそれぞれの実次元の半分である.

(4) $*$ は複素共役を，$\dagger$ は Hermite 共役を表わす.

§A.3　古典線形群の基本群

弧状連結だが単連結でない線形群の非単連結性の度合いを表わす概念である基本群について説明し，その一覧表を示す．

X を弧状連結な位相空間とし，X の一点 p を基点とする X 内のすべてのループの集合を $\Omega(\mathrm{X}, \mathrm{p})$ とする．この集合の任意の元 ρ, σ に対して

$$\tau(t) := \begin{cases} \rho(2t) & (0 \leq t \leq 1/2) \\ \sigma(2t-1) & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

で定義されるループを ρ と σ を繋いだループといい，$\rho \vee \sigma$ で表わす．また

$$\varphi(t) := \rho(1-t) \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

で定義されるループ φ を，ρ の向きを逆にしたループといい，ρ^- で表わす．ρ', σ' を $\Omega(\mathrm{X}, \mathrm{p})$ の元とするとき

$$\rho \simeq \rho' \quad (\mathrm{X}), \quad \sigma \simeq \sigma' \quad (\mathrm{X}) \quad \Rightarrow \quad \rho \vee \sigma \simeq \rho' \vee \sigma' \quad (\mathrm{X})$$

が成り立つ．なぜなら，ρ から ρ' へのホモトピーを H とし，σ から σ' へのホモトピーを G とすれば

$$F(s, t) := \begin{cases} H(s, 2t) & (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1/2] \\ G(s, 2t-1) & (s, t) \in [0, 1] \times [1/2, 1] \end{cases}$$

によって定義した写像 $F : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathrm{X}$ は連続であって $\rho \vee \sigma$ から $\rho' \vee \sigma'$ へのホモトピーとなるからである．

ホモトープという関係は同値関係であったから，これによる $\Omega(\mathrm{X}, \mathrm{p})$ のすべての同値類の集合を $\Omega(\mathrm{X}, \mathrm{p})/\sim$ とする．ρ を含む同値類を $[\rho]$ と記すとき，$\Omega(\mathrm{X}, \mathrm{p})/\sim$ に積の演算を

$$[\rho] \cdot [\sigma] := [\rho \vee \sigma]$$

によって定義すれば，$\Omega(\mathrm{X}, \mathrm{p})/\sim$ は群となる．実際，$\rho \simeq \rho \vee 0_{\mathrm{p}} \simeq 0_{\mathrm{p}} \vee \rho$ が成り立つから単位元は $[0_{\mathrm{p}}]$ であり，$\rho^- \vee \rho \simeq \rho \vee \rho^- \simeq 0_{\mathrm{p}}$ より $[\rho]$ の逆元は $[\rho^-]$ である．結合律は，$(\rho \vee \sigma) \vee \varphi \simeq \rho \vee (\sigma \vee \varphi)$ だから成立する．群とみた $\Omega(\mathrm{X}, \mathrm{p})/\sim$ を，p を基点とする X の**基本群** (fundamental group) といい，$\pi_1(\mathrm{X}, \mathrm{p})$ と記す．

定理 A.1　X を弧状連結な位相空間とし，p, q を X の任意の 2 点とする．$\pi_1(\mathrm{X}, \mathrm{p})$ と $\pi_1(\mathrm{X}, \mathrm{q})$ とは群として同形である．

［証明］ X は弧状連結なので p を始点，q を終点とする X 内の経路 φ が存在する．$\Omega(\mathsf{X}, \mathrm{p})$ の任意の元 ρ に対して対応 $[\rho] \mapsto [(\varphi^- \vee \rho) \vee \varphi]$ は $\pi_1(\mathsf{X}, \mathrm{p})$ から $\pi_1(\mathsf{X}, \mathrm{q})$ への準同形写像であり，$\Omega(\mathsf{X}, \mathrm{q})$ の任意の元 σ に対して対応 $[\sigma] \mapsto [(\varphi \vee \sigma) \vee \varphi^-]$ は $\pi_1(\mathsf{X}, \mathrm{q})$ から $\pi_1(\mathsf{X}, \mathrm{p})$ への準同形写像である．そして，これら 2 つの写像は互いに他の逆写像になっているから，$\pi_1(\mathsf{X}, \mathrm{p})$ と $\pi_1(\mathsf{X}, \mathrm{q})$ とは同形である． ∎

以下，$\pi_1(\mathsf{X}, \mathrm{p})$ を $\pi_1(\mathsf{X})$ と記す．

系 A.1 弧状連結な位相空間 X において，X の 1 点 p が存在して p を基点とするすべてのループが定値のループ 0_{p} にホモトープならば，X は単連結である．

［証明］ 仮定により $\pi_1(\mathsf{X}, \mathrm{p})$ は単位元のみよりなるので，定理 A. 4. 1 より p と異なる任意の点 q に対しても $\pi(\mathsf{X}, \mathrm{q})$ は単位元のみよりなる．よって q を基点とするすべてのループは 0_{q} にホモトープとなるので，X は単連結である． ∎

弧状連結な位相群 G に対しては，$\pi_1(\mathsf{G})$ は可換群となる．これを証明するため，次の補題を用意する．

補題 A.1 $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ を $\Omega(\mathsf{G}, \mathrm{e})$ の任意のループとし

$$(\lambda\mu)(t) := \lambda(t)\,\mu(t) \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

によってループ $\lambda\mu$ を定義すると

$$(\lambda \vee \mu)(\lambda' \vee \mu') = (\lambda\lambda') \vee (\mu\mu')$$

が成り立つ．証明は，簡単であるから省略する． □

定理 **A.2** 弧状連結な位相群 G に対して $\pi_1(\mathsf{G})$ は可換群である．

［証明］ 基本群の積演算の定義により，$\Omega(\mathsf{G}, \mathrm{e})$ の任意の 2 つの元 ρ, σ に対して $\rho \vee \sigma \simeq \sigma \vee \rho$ を示せばよい．はじめに $\rho \simeq \rho \vee 0_{\mathrm{e}}, \sigma \simeq 0_{\mathrm{e}} \vee \sigma$ であるから上の補題により

$$\rho\sigma \simeq (\rho \vee 0_{\mathrm{e}})(0_{\mathrm{e}} \vee \sigma) = (\rho 0_{\mathrm{e}}) \vee (0_{\mathrm{e}}\sigma) = \rho \vee \sigma.$$

次に，$\rho \simeq 0_{\mathrm{e}} \vee \rho, \sigma \simeq \sigma \vee 0_{\mathrm{e}}$ でもあるから

$$\rho\sigma \simeq (0_{\mathrm{e}} \vee \rho)(\sigma \vee 0_{\mathrm{e}}) = (0_{\mathrm{e}}\sigma) \vee (\rho 0_{\mathrm{e}}) = \sigma \vee \rho.$$

よって $\rho \vee \sigma = \sigma \vee \rho$ が示された． ∎

古典線形群の基本群のリストを示そう．

表 A.3　古典線形群の基本群

古典線形群	基本群
$\mathrm{SU}(n)$	0
$\mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$	0
$\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{C})$	0
$\mathrm{Sp}(2n)$	0
$\mathrm{U}(n)$	Z
$\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$	Z
$\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})$	Z
$\mathrm{SO}(n)$	$n=2$ のとき Z $n \geq 3$ のとき Z_2
$\mathrm{GL}^+(n, \mathbf{R})$	$\mathrm{SO}(n)$ の基本群と同じ
$\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$	同上
$\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$	同上
$\mathrm{O}(p, q)_0$	$\pi_1\big(\mathrm{SO}(p)\big) \times \pi_1\big(\mathrm{SO}(q)\big)$

$\mathrm{O}(p, q)_0$ は群 $\mathrm{O}(p, q)$ の，単位元を含む連結成分を表わす(p. 124)．

Z_n は n 位の巡回群を表わす．$Z=Z_\infty$ である．加法群としていえば，$Z_n=\{0, 1, \cdots, n-1\}$ で $(n-1)+1=0$ とする．

上の表からわかるとおり，各線形群の基本群は Z および Z_2，またはこれらの直積で表わされる．こうした，さまざまの型の基本群が各線形群の非単連結性を示している．特に，Z_2 を基本群とする線形群は 2 重連結である．

§ A.4 Cartan 行列

$$\mathrm{A}_r:\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & & -1 & 0 \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (r \geqq 1)$$

$$\mathrm{B}_r:\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & & -1 & 0 \\ & & & & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (r \geqq 2)$$

C_r: B_r型の Cartan 行列の転置 $(r \geqq 2)$

$$\mathrm{D}_r:\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 2 & -1 & -1 \\ & & & & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (r \geqq 3)$$

$$E_6: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_7: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_8: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_4: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G_2: \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

参考書

入門書

[1] H. F. Jones, Groups, Representations, and Physics, Adam Hilger, 1990.

[2] V. V. Nikulin and I. R. Shafarevich, 幾何学と群，根上生也訳，シュプリンガー, 1994.

[3] 吉川圭二，群と表現，理工系の基礎数学シリーズ，岩波書店，1996.

[4] 志賀浩二，群論への 30 講，朝倉書店，第 15 刷 2008，初版 1989.

有限群

[5] D. E. Littlewood, The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups, Oxford, 2nd ed. 1940.

[6] 彌永昌吉・杉浦光夫，応用数学者のための代数学，岩波書店，1960.

[7] J.-P. Serre, 有限群の線型表現，岩堀長慶・横沼健雄共訳，岩波書店，1974. Linear Representation of finite Groups, Translated by L. L. Scott, Springer, 1977.

[8] 岩堀長慶，対称群と一般線形群の表現論，岩波講座基礎数学，岩波書店，1978.

[9] 永尾汎・津島行雄，有限群の表現，裳華房，1987.

[10] 近藤武，群論，基礎数学選書，岩波書店，1991.

[11] W. Fulton, Young Tableaux, Cambridge Univ. Press, 1997.

[12] B. E. Sagan, The Symmetric Group Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions, Springer GTM203, 2nd ed 2000, 1st ed. 1991.

[13] G. James and M. Liebeck, Representations and Characters of Groups, Cambridge Univ. Press, 2nd ed. 2001, 1st ed. 1993.

[14] 寺田至，ヤング図形のはなし，日本評論社，2002.

連続群

[15] 山内恭彦，回転群とその表現，岩波書店，1957.

[16] 岩堀長慶，Lie 群論 I, II 岩波講座現代応用数学，岩波書店，1957.

[17] 山内恭彦・杉浦光夫，連続群論入門，培風館，1960.

[18] N. Jacobson, Lie Algebras, Interscience Publishers, 1962.

[19] N. Jacobson, Exceptional Lie Algebras, Marcel Dekker, 1971.

[20] L. Pontrjagin, 連続群論，上・下，柴岡泰光・杉浦光夫・宮崎功共訳，岩波書店，第 2 版 1975，初版 1957.

[21] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Academic Press, 1978.

[22] V. S. Varadarajan, Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations, Springer GTM 102, 2nd ed. 1984, 1st ed. Prentice-Hall 1974.

[23] J. E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representations Theory, revised ed., Springer, 1980.

[24] W. B. McKay and Patera, Tables of Dimensions, Indices, and Branching Rules for Representations of Simple Lie Algebras, Marcel Dekker, 1981.

[25] 佐武一郎，リー群の話，日本評論社，1982.

[26] T. Bröcker and T. tom Dieck, Representations of Compact Lie Groups, GTM98 Springer, 1985.

[27] J.-P. Serre, Complex Semisimple Lie Algebras, Translated by G. A. Jones, Springer, 1987, The original French edition, Benjamin, 1966.

[28] W. Hein, Einführung in die Strukutur- und Darstellungstheorie der Klassischen Gruppen, Springer, 1990.

[29] 横田一郎，古典型単純 Lie 群，現代数学社，1990.

[30] 横田一郎，例外型単純 Lie 群，現代数学社，1992.

[31] J.-P. Serre, Lie Algebras and Lie Groups, Springer, 2nd ed. 1992.

[32] 島和久，連続群とその表現 応用数学叢書，岩波書店，第 3 刷 1995，初版 1981.

[33] J. F. Adams, Lectures on Exceptional Lie Groups, University of Chicago Press, 1996.

[34] 杉浦光夫，リー群論，共立出版，2000.

[35] W. R. de Graaf, Lie Algebras, Theory and Algorithms, Elsevier Science B. V. 2000.

[36] 横田一郎，群と位相，裳華房，復刊 2001，初版 1971.

[37] 佐武一郎，リー環の話 (新版) 日本評論社，2002.

[38] A. W. Knapp, Lie Groups Beyond an Introduction, Birkhäuser, 2nd ed. 2002, 1st ed. 1996.

[39] 平井武・山下博，表現論入門セミナー 具体例から最先端へむかって，遊星社，2003.

[40] B. C. Hall, Lie groups, Lie Algebras, and Representations An Elementary Introduction, GTM222 Springer, 2003.

[41] W. Fulton and J. Harris, Representation Theory, A First Course, GTM129

Springer, 2004.
[42] D. Bump, Lie Groups, GTM222 Springer, 2004.
[43] 村上信吾，連続群論の基礎，朝倉書店，復刊 2004，初版 1973.
[44] 小林俊行・大島利雄，リー群と表現論，岩波書店，2005.
[45] 岡田聡一，古典群の表現論と組合せ論 上・下，培風館，2006.
[46] A. Kirillov Jr., An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras, Cambridge Univ. Press, 2008.

物理学への応用

[47] 犬井鉄郎・田辺行人・小野寺嘉孝，応用群論 ―群表現と物理学―，裳華房，増補版 14 刷 2008，初版 1976.
[48] M. Hamermesh, Group Theory and Its Application to Physical Problems, Addison-Wesley, 1962.
[49] 犬井鉄男・柳川禎章，群表現と原子及び分子，裳華房，修正第 2 版，1955.
[50] B. L. van der Waerden, Group Theory and Quantum Mechanics, Springer, 1974.
[51] E. P. Wigner, 群論と量子力学，森田正人・森田玲子共訳，吉岡書店，1978.
[52] A. R. Edmonds, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton, 1960.
[53] H. B. J. Casimir, Rotation of a Rigid Body in Quantum Mechanics, J. B. Wolter's Uitgevers-Maatschappij, 1931.
[54] M. A. Naimark, Linear Representations of the Lorentz Group, Pergamon Press, 1963.
[55] I. M. Gel'fand, R. A. Minlos and Z. Y. Shapiro, Representation of Rotation and Lorentz Groups and Their Applications, Pergamon Press, 1963.
[56] 大貫義郎，ポアンカレ群と波動方程式 応用数学叢書，岩波書店，第 7 刷 2008，初版 1976.
[57] 田辺行人・菅野曉・上村洸，配位子場理論とその応用，裳華房，1969.
[58] W. Miller, Symmetry Groups and Their Applications, Academic Press, 1972.
[59] 柳川禎章，群と結晶，共立出版，1974.
[60] 小川智哉，結晶物理工学，応用物理学選書，裳華房，1976.
[61] A. M. Perelomov, Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras, Birkhäuser, 1990.
[62] R. Abraham and J. E. Marsden, Foundations of Mechanics, Revised and

Enlarged ed., Benjamin/Cummings, 1978.
[63] 萩原雄祐，天体力学の基礎 —序論と変換論，生産技術センター，1976.
[64] M. Carmeli, Group Theory and General Relativity, McGraw-Hill, 1977.
[65] H. Georgi, 物理学におけるリー代数，九後汰一郎訳，吉岡書店，1990.
[66] 佐藤光，群と物理，丸善，1993.
[67] 窪田高弘，物理のためのリー群とリー代数，SGS ライブラリ 66，サイエンス社，2008.

化学への応用

[68] 藤永茂・成田進，化学や物理のためのやさしい群論入門，岩波書店，第 3 刷 2007，初版 2001.
[69] 中島昌男，分子の対称と群論，東京化学同人，1973.
[70] G. Herzberg, Molecular Spectra and Molecular Structure, D. van Nostrand, 1945.
[71] K. Nakamoto, Infrared Spectra of Inorganic and Coordination Compounds, John Wiley and Sons, 2nd ed. 1970.

群表現と解析学

[72] W. Miller Jr., Lie Theory and Special Functions, Academic Press, 1968.
[73] N. Ja. Vilenkin, Special Functions and the Theory of Group Representations, Amer. Math. Soc., 1968.
[74] 竹内勝，現代の球関数，岩波書店，1975.
[75] L. V. Ovsiannikov, Group Analysis of Differential Equations, Translated by W. F. Ames, Academic Press, 1982.
[76] A. Wawrzyńczyk, Group Representations and Special Functions, Reidel, 1984.
[77] V. S. Varadarajan, An Introduction to Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups, Cambridge Univ. Press, 1989.
[78] 杉浦光夫，Unitary Representations and Harmonic Analysis, 講談社，2nd ed. 1990, 1st ed. 1975.
[79] S. Helgason, Groups and Geometric Analysis, Amer. Math. Soc., 2000.
[80] J. Faraut, Analysis on Lie Groups An Introduction, Cambridge Univ. Press, 2008.

演習問題解答

第1章

1.1 Cを群Gの共役類とし，x, y をCの任意の二つの元とする．そして x と y の位数をそれぞれ m, n とする．まず $m, n>0$ の場合．$\exists a \in \mathsf{G}$: $x=aya^{-1}$ であるから，$x^n=(aya^{-1})(aya^{-1})\cdots(aya^{-1})=ay^na^{-1}=aea^{-1}=e$．故に $m \leqq n$．x と y の立場を変えて $n \leqq m$ が得られ，よって $m=n$．次に $n=0$ の場合．どんな自然数 k に対しても $y^k \neq e$．故に $x^k=ay^ka^{-1} \neq e$，したがって $x^k \neq e$．故に $m=0$ である．

1.2 (i) 軸Aを軸Bに重ねる変換を T_{AB} とすれば，A軸のまわりの角 ϕ の回転 $R_{\mathrm{A}}(\phi)$ は $R_{\mathrm{A}}(\phi)=T_{\mathrm{AB}}^{-1}R_{\mathrm{B}}(\phi)T_{\mathrm{AB}}$．(ii) その2回軸のまわりの回転を C_2 とすれば，$C_n=C_2^{-1}C_n^{-1}C_2$ また $C_n^{n-1}=C_n^{-1}$ である．(iii) 図1.1を参照．

1.3 共役類は $\{e\}$，$\{a^2\}$，$\{a, a^3\}$，$\{b, ba^2\}$，$\{ba, ba^3\}$ の五つ．類等式は $8=1+1+2+2+2$．

1.4 初めに $(x'x)x'=x'(xx')=x'e=x'$ が成り立つことに注意する．次に $x'x''=e$ をみたす元 x'' が存在するので，これを等式 $(x'x)x'=x'$ の両辺に右から乗ずれば，$((x'x)x')x''=e$ が得られ，左辺$=(x'x)(x'x'')=(x'x)e=x'x$ となるので，$x'x=e$ が得られる．これは x' が x の左逆元にもなっていることを示す．最後に，$ex=(xx')x=x(x'x)=xe=x$ が成り立つことから，e は左単位元にもなっていることがわかる．後半 $c(x_1, x_2, \cdots)=(0, 0, x_1, x_2, \cdots)$ によって定義される変換 c に対しては，$c(ab) \neq (ca)b$ となる．つまり結合律が成立していない．

1.5 a をHに属さないGの任意の元とするとき，Gの左剰余類分割は $\mathsf{G}=\mathsf{H} \cup a\mathsf{H}$ であり，右剰余類分割は $\mathsf{G}=\mathsf{H} \cup \mathsf{H}a$ である．よって $a\mathsf{H}=\mathsf{H}a$ が成り立つ．a がHの元のときはこの等式は当然成り立つから，a がGの任意の元のとき $a\mathsf{H}=\mathsf{H}a$ が成り立つことになる．故にHはGの正規部分群となる．

1.6 Gの任意の固定元 x に対して $\sigma_x(y):=xyx^{-1}$ $(\forall y \in \mathsf{N})$ によって，Nの自己同形写像 σ_x を定義することができる．そして $\sigma_x(\mathsf{K})=\mathsf{K}$ すなわち $x\mathsf{K}x^{-1}=\mathsf{K}$．故にKはGの正規部分群である．

1.7 (i) $e \in \mathsf{N}(\mathsf{S})$ であるから，$\mathsf{N}(\mathsf{S})$ は空集合でない．$x, y \in \mathsf{N}(\mathsf{S})$ とするとき，$x\mathsf{S}x^{-1} = \mathsf{S}$, $\mathsf{S} = y^{-1}\mathsf{S}y$ の関係があるから，$(xy^{-1})\mathsf{S}(xy^{-1})^{-1} = \mathsf{S}$ が成り立つ．故に $xy^{-1} \in \mathsf{N}(\mathsf{S})$．よって $\mathsf{N}(\mathsf{S})$ は G の部分群である．(ii) S が G の部分群のとき，S が $\mathsf{N}(\mathsf{S})$ の正規部分群であることは明らか．次に，H が G の部分群で，S が H の正規部分群になっているとすれば，$\mathsf{H} \subset \mathsf{N}(\mathsf{S})$ が成り立つ．(iii) a を含む共役類を C_a とすれば，C_a と左剰余類空間 $\mathsf{G}/\mathsf{N}(a)$ との間には，$xax^{-1} \leftrightarrow x\mathsf{N}(a)$ $(x \in \mathsf{G})$ によって 1 対 1 の対応がつく．

1.8 (i) n に関する数学的帰納法を用いる．$n=2$ の場合は明らか．$n>2$ の場合 $n-1$ 次の対称群については定理は正しいと仮定する．$\sigma \in \mathrm{S}_n$ とする．$\sigma(n)=n$ ならば，σ は $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ の置換とみなせるので，σ について定理が成り立つ．$\sigma(n) \neq n$ のときは，$m := \sigma(n)$, $\sigma' := (1n)(1m)\sigma$ とおけば，$\sigma'(n) = n$ なので σ' については定理が成り立つ．$\sigma = (1m)^{-1}(1n)^{-1}\sigma' = (1m)(1n)\sigma'$ であるから，σ について定理が成り立つ．(ii) A_n の任意の元 σ は (i) によって $(1k)$ 型の互換の偶数個の積によって表わされるから，σ は $(1j)(1k)$ 型の置換の積によって表わされる．しかるに

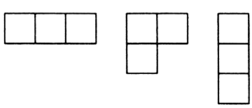
$$(1j)(12) = (12j), \quad (12)(1j) = (12j)^{-1} \quad (j \neq 2)$$
$$(1j)(1k) = (12j)(12k)^{-1} \quad (j \neq 2,\ k \neq 2).$$

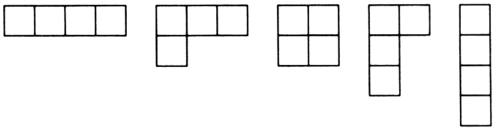
1.9 (i) a を巡回置換とし，σ を一般の置換とするとき，$\sigma a \sigma^{-1}$ は a の各因子の数字をそれに σ を作用させた結果で置き換えたものであるから，長さは変わらない．(ii) ab を巡回置換の積とすれば，$\sigma(ab)\sigma^{-1} = (\sigma a \sigma^{-1})(\sigma b \sigma^{-1})$ なので，a, b のそれぞれの長さは変わらない．(iii) 略．

1.10 S_n の共役類の個数は不定方程式 $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = 0$ の非負の整数解 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ の個数に等しい．そこで一つの解 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ で指定される共役類の元の個数は，n 個の場所に n 個の異なる数字 $1, 2, \cdots, n$ を並べる並べ方のうちで長さが l の巡回置換を k_l 個並べる順序は区別しないので，$n!$ を $k_l!$ で割っておかねばならず，また一つの長さ l の巡回置換の中で数字を巡回的に変えて得られる l 個の巡回置換は区別しないので，さらに l^{k_l} で割っておく必要がある．

1.11 (i)

S_3:

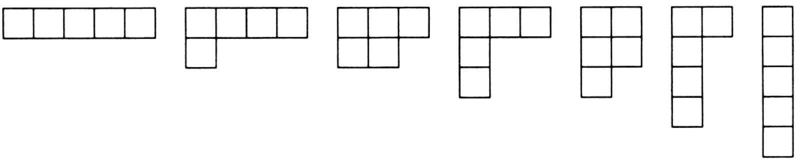


S_4: 

(ii) S_3: (0,0,1), (1,1,0), (3,0,0),

S_4: (0,0,0,1), (1,0,1,0), (0,2,0,0), (2,1,0,0), (4,0,0,0)

(iii)



(0,0,0,0,1), (1,0,0,1,0), (0,1,1,0,0), (2,0,1,0,0), (1,2,0,0,0), (3,1,0,0,0), (5,0,0,0,0). 類等式 $24+30+20+20+15+10+1=5!$.

1.12 $\mathsf{H}=\{1,(12),(3,4),(12)(3,4)\}$, $[S_4:\mathsf{H}]=6$.

1.13 G/N の任意の元 X に対して，X から一つの代表元 x をとり，$f(X):=x\mathsf{H}$ とおけば，右辺は X からの代表元の選び方によらないので，写像 f: G/N → G/H が定義される．f が全射かつ準同形写像で，$\mathrm{Ker}(f)=\mathsf{H}/\mathsf{N}$ となることを示して，準同形定理を用いよ．

1.14 (i) 略．(ii) H も K も単位元 e を含むので，$a=eae\in\mathsf{H}a\mathsf{K}$．したがって (ア) $x,y\in\mathsf{H}a\mathsf{K}$ ならば $x\sim y$ となること，(イ) $x\in\mathsf{H}a\mathsf{K}$, $x\sim y$ ならば $y\in\mathsf{H}a\mathsf{K}$ となること，を示せばよい．(ア) の証．$\exists h\in\mathsf{H}$, $\exists k\in\mathsf{K}$: $x=hak$, $\exists h'\in\mathsf{H}$, $\exists k'\in\mathsf{K}$: $y=h'ak'$ と表わされるので，$(h'h^{-1})x=y(k'^{-1}k)$ が成り立つ．故に $\mathsf{H}x\cap y\mathsf{K}\neq\phi$，すなわち $x\sim y$．(イ) の証．$\exists h\in\mathsf{H}$, $\exists k\in\mathsf{K}$: $x=hak$ と表わされ，$\mathsf{H}x\cap y\mathsf{K}\neq$ より $\exists h'\in\mathsf{H}$, $\exists k'\in\mathsf{K}$: $h'x=yk$ が成り立つ．故に $y=(h'h)a(kk'^{-1})\in\mathsf{H}a\mathsf{K}$．(iii) K に関する任意の左剰余類は $x\mathsf{K}$ の形で表わされる．$\mathsf{H}a\cap x\mathsf{K}\neq\phi$ を仮定すれば，$\exists h\in\mathsf{H}$, $\exists k\in\mathsf{K}$: $ha=xk$ が成り立つので，$x\mathsf{K}=ha(k^{-1}\mathsf{K})\subset ha\mathsf{K}\subset\mathsf{H}a\mathsf{K}$.

1.15 (i) $\forall y\in\mathsf{G}$ に対して $I_a(x)=y$ をみたす G の元 x は $x=aya^{-1}$ のただ一つに限るから，I_a は全単射である．次に $\forall x,y\in\mathsf{G}$ に対して $I_a(xy)=a(xy)a^{-1}=(axa^{-1})(aya^{-1})=I_a(x)I_a(y)$ となるので I_a は群の演算を保つ．(ii) $I_a\circ I_b=I_{ab}$，$(I_a)^{-1}=I_{a^{-1}}$ が成り立つので Inn(G) は Aut(G) の部分群をなす．次に，$\forall\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathsf{G})$ に対

して $\sigma\circ I_a\circ\sigma^{-1}=I_{\sigma(a)}$ が成り立つので，Inn(G) は正規部分群をなす．(iii) G から G/Z(G) への標準写像を π とし，$f(I_a)=\pi(a)$ $(\forall a\in \mathrm{G})$ によって写像 f: Inn(G) → G/Z(G) を定義し，f が同形写像であることを示せ．

1.16 (i) X の任意の二つの元を z, z' とする．$gz=\mathrm{i}$ となる $g\in\mathrm{SL}(2,\mathrm{R})$ は存在する．例えば，$a=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Im}\,z}}$，$b=\dfrac{-\mathrm{Re}\,z}{\sqrt{\mathrm{Im}\,z}}$，$c=0$，$d=\sqrt{\mathrm{Im}\,z}$．同じく $g'z'=\mathrm{i}$ となる $g'\in\mathrm{SL}(2,\mathrm{R})$ が存在する．$(g^{-1}g')z'=z$，$g^{-1}g'\in\mathrm{SL}(2,\mathrm{R})$ であるから，SL(2, R) は X に推移的に作用する．(ii) $\dfrac{a\mathrm{i}+b}{c\mathrm{i}+d}=\mathrm{i}$ より $a=d$，$b=-c$．そして条件 $ad-bc=1$ より $a^2+b^2=1$．したがって点 i における等方部分群は $\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ $(a^2+b^2=1)$ の形の行列全体よりなる．

1.17 必要性．G×H が巡回群であると仮定すれば，これは位数 mn の元 c をもつ．$c=(a,b)$ $(\exists a\in \mathrm{G},\ \exists b\in \mathrm{H})$ と表わされるので，m と n の最小公倍数を l とすれば，$c^l=(a^l,b^l)=e$ となって $mn\leqq l$ でなければならない．故に m と n は互いに素である．十分性．$\mathrm{G}=\{e_1,a,\cdots,a^{m-1}\}$，$\mathrm{H}=\{e_2,b,\cdots,b^{n-1}\}$ と表わし (e_1, e_2 はそれぞれ G,H の単位元)，$c:=(a,b)$ とおき，c の位数を p とする．G×H の位数は mn であるから，$p\leqq mn$ である．次に $e=c^p=(a^p,b^p)$ より $a^p=e_1$，$b^p=e_2$ が得られるので，a の位数 m は p の約数であり，n も p の約数である．今 m と n は互いに素であると仮定すれば，mn は p の約数となり，したがって $mn\leqq p$ となり，$p=mn$ が得られる．故に $\mathrm{G}\times\mathrm{H}=\{e,c,\cdots,c^{mn-1}\}$．

第2章

2.1 (i) 略．(ii) $R^{(1)}, R^{(2)}, S^{(m)}$ $\left(0<m\leqq\dfrac{n-1}{2}\right)$ が既約表現の代表系をなす．$1^2+1^2+2^2\times\dfrac{n-1}{2}=2n$ に注意せよ．(iii) 略．

2.2 前問において $n=4$，$m=1$ の場合を採用する．

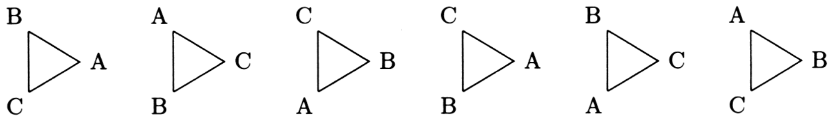
$$S(a)=\begin{pmatrix}\mathrm{i} & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad S(b)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

$A:=\dfrac{1}{\sqrt{50}}\begin{pmatrix}5 & 5\mathrm{i}\\ 3-4\mathrm{i} & -4-3\mathrm{i}\end{pmatrix}$ とおけば，A はユニタリ行列で $A\mathrm{U}(a)A^{-1}=S(a)$，$A\mathrm{U}(b)A^{-1}=S(b)$ が成り立つ．

2.3 (i) $f_x=x$ とするとき，$f_x(\rho^{-1}(x,y))$ は $\rho^{-1}(x,y)$ の x 成分を意味し，$f_y(\rho^{-1}(x,y))$ は y 成分を意味する．ところが

$$\rho(C_3{}^{-1})(x,y)=(x,y)\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=(x,y)\begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

となる．ただし，$\theta=2\pi/3$ である．$\rho(\sigma_x)$ についても同様．この群は I, C_3, $C_3{}^2$, σ, σC_3, $\sigma C_3{}^2$ の 6 個の元をもつ．これらは，三角形の次の配向にそれぞれ対応する．このことから群 C_{3v} の元が上記のほかにはないことがわかる．



これは既約である．行列 $\rho(C_3)$ と可換な行列を見ると

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-a+\sqrt{3}c & -b+\sqrt{3}d\\ -\sqrt{3}a-c & -\sqrt{3}b-d\end{pmatrix}$$

と
$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-a-\sqrt{3}b & \sqrt{3}a-b\\ -c-\sqrt{3}d & \sqrt{3}c-d\end{pmatrix}$$

を比べて $c=-b, d=a$ となる．さらに $\rho(\sigma)$ と可換なことを考慮すれば $b=c=0$ が結論される．(ii) $\psi=\alpha f_x+\beta f_y$ を $\psi=(f_x,f_y)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ と書いておけば

$$\rho\cdot\psi=(\rho(f_x,f_y))\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=(f_x,f_y)R^{(\mathrm{E})}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

となり，これが任意の (x,y) に対して成り立つから問題に与えられている式が得られる．(iii) $(\rho f_{xx})(x,y)=f_{xx}(\rho^{-1}(x,y))$ は $\rho^{-1}(x,y)$ の成分の 2 乗を意味するから，$(\rho f_{xx})=\dfrac{1}{4}(-x-\sqrt{3}y)^2$．$\rho f_{xy}, \rho f_{yy}$ も同様に計算して

$$\rho(f_{xx},f_{xy},f_{yy})=(f_{xx},f_{xy},f_{yy})\begin{pmatrix}1/4 & -\sqrt{3}/4 & 3/4\\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & -\sqrt{3}/2\\ 3/4 & \sqrt{3}/2 & 1/4\end{pmatrix}.$$

これは既約でない．なぜなら，この表現のどの行列も $f_{xx}+f_{yy}$ を不変にするから．

2.4　略．

2.5　フェルミオンの n 粒子系の波動関数は S_n の交代表現に属する．

2.6　略．

2.7 略.

2.8 (i), (ii) 共役類の項の第二行は代表元，第三行の数字は元の個数を示す.

S_2 の指標表

共役類	(2, 0) e 1	(0, 1) (12) 1
$\chi^{[2]}$	1	1
$\chi^{[11]}$	1	−1

S_3 の指標表

共役類	(3, 0, 0) e 1	(1, 1, 0) (12) 3	(0, 0, 1) (123) 2
$\chi^{[3]}$	1	1	1
$\chi^{[21]}$	2	0	−1
$\chi^{[111]}$	1	−1	1

S_4 の指標表

共役類	(4, 0, 0, 0) e 1	(2, 1, 0, 0) (12) 6	(1, 0, 1, 0) (123) 8	(0, 2, 0, 0) (12)(34) 3	(0, 0, 0, 4) (1234) 6
$\chi^{[4]}$	1	1	1	1	1
$\chi^{[31]}$	3	1	0	−1	−1
$\chi^{[22]}$	2	0	−1	2	0
$\chi^{[211]}$	3	−1	0	−1	1
$\chi^{[1111]}$	1	−1	1	1	−1

S_5 の指標表

共役類	(5, 0, 0, 0, 0) e 1	(3, 1, 0, 0, 0) (12) 10	(2, 0, 1, 0, 0) (123) 20	(1, 2, 0, 0, 0) (12)(34) 15	(1, 0, 0, 1, 0) (1234) 30
$\chi^{[5]}$	1	1	1	1	1
$\chi^{[41]}$	4	2	1	0	0
$\chi^{[32]}$	5	1	−1	1	−1
$\chi^{[311]}$	6	0	0	−2	0
$\chi^{[221]}$	5	−1	−1	1	1
$\chi^{[2111]}$	4	−2	1	0	0
$\chi^{[11111]}$	1	−1	1	1	−1

共役類	(0, 1, 1, 0, 0) (12)(345) 20	(0, 0, 0, 0, 1) (12345) 24
$\chi^{[5]}$	1	1
$\chi^{[41]}$	−1	−1
$\chi^{[32]}$	1	0
$\chi^{[311]}$	0	1
$\chi^{[221]}$	1	0
$\chi^{[2111]}$	1	−1
$\chi^{[11111]}$	1	1

(iii) $\chi^{[\lambda]}(e)=n!\dfrac{\prod_{i<j}(l_i-l_j)}{l_1!\ l_2!\cdots l_\nu!}$, $\quad l_j=\lambda_j+\nu-j \quad (j=1,2,\cdots,\nu)$.

2.9 略.

2.10 初めに D_4 の共役類は $C_1=\{e\}$, $C_2=\{a^2\}$, $C_3=\{a,a^3\}$, $C_4=\{b,ba^2\}$, $C_5=\{ba,ba^3\}$ の五つであることに注意する. H は 4 次の巡回群でこの既約指標 (表現) は例 2.6 に求めてある. そのうちの二つ $R^{(0)}, R^{(1)}$ の D_4 における誘導指標 ξ,η を求める.

	e	a	a^2	a^3
$R^{(0)}$	1	1	1	1
$R^{(1)}$	1	i	-1	$-$i

$xax^{-1}=a$ となる x は e,a,a^2,a^3 の 4 個あり, $xax^{-1}=a^3$ となる x は b,ba,ba^2,ba^3 の 4 個あり, $xax^{-1}=a^2$ となる x は存在しない. また, $xbx^{-1}\in$ H となる x も, $x(ba)x^{-1}\in$ H となる x も存在しない. したがって最後に述べる補遺を用いれば, ξ のとる値は, $\xi(e)=\dfrac{1}{4}\times 8\times 1=2$, $\xi(a^2)=\dfrac{1}{4}\times 8\times 1=2$, $\xi(a)=\dfrac{1}{4}(4\times 1+4\times 1)=2$, $\xi(b)=0$, $\xi(ba)=0$ となる. しかし $(\xi,\xi)=\dfrac{1}{8}(2^2+2^2+2\times 2^2+2\times 0^2+2\times 0^2)=2$ であるから ξ は既約でない. そこで D_4 の恒等指標 $\chi^{(1)}$ を用いて, ξ に含まれる $\chi^{(1)}$ の回数を計算すると, $(\xi,\chi^{(1)})=\dfrac{1}{8}(2\times 1+2\times 1+2\times 2\times 1+2\times 0\times 1+2\times 0\times 1)=1$ であるから, $\chi^{(2)}:=\xi-\chi^{(1)}$ とおけば, $\chi^{(2)}$ は指標で $(\chi^{(2)},\chi^{(2)})=(\xi,\xi)-2(\xi,\chi^{(1)})+(\chi^{(1)},\chi^{(1)})=2-2+1=1$ となるから既約である. そして $\chi^{(2)}$ が各共役類の上でとる値は 1, 1, 1, -1, -1 である. 次に, $\eta(e)=\dfrac{1}{4}\times 8\times 1=2$, $\eta(a^2)=\dfrac{1}{4}\times 8\times(-1)=-2$, $\eta(a)=\dfrac{1}{4}\times\Big(4\times \mathrm{i}+4\times(-\mathrm{i})\Big)=0$, $\eta(b)=0$, $\eta(ba)=0$ であって, $(\eta,\eta)=\dfrac{1}{8}\Big(2^2+(-2)^2+2\times 0^2+2\times 0^2+2\times 0^2\Big)=1$ となるので, η は既約である. これで三つの既約指標 $\chi^{(1)}$, $\chi^{(2)}$, η が得られたが, どの二つも同値でない. さらに二つの同値でない既約指標があるはずだが, それらの e における値は式 (2.66) により共に 1 と定まる.
残りの空欄は既約指標の第 1 直交関係と第 2 直交関係を用いれば埋められる.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
η	2	-2	0	0	0
$\chi^{(3)}$	1	1	-1	1	-1
$\chi^{(4)}$	1	1	-1	-1	1

補遺. H を有限群 G の部分群とし, σ を H の表現とする. σ の指標を ψ とし, σ の G における誘導表現の指標を ψ^{G} で表わすならば, これは

$$\psi^{\mathsf{G}}(a) = \frac{1}{|\mathsf{H}|}\sum_{x\in \mathsf{G}} \psi_0(xax^{-1}) \quad (\forall a \in \mathsf{G})$$

で与えられる．ここに ψ_0 は次式で定義される．

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \psi(x) & x \in \mathsf{H} \text{ のとき} \\ 0 & x \in \mathsf{G}-\mathsf{H} \text{ のとき} \end{cases}$$

2.11 対称性 A_1 のモード　$\boldsymbol{R}_1 = (X_1, 0, Z_1)$ とおく．${R'_1}^2 = (X_1+x)^2 + (Z_1+z-z_0)^2$ より $R'_1 = R + R^{-1}\{X_1x + Z_1(z-z_0)\}$．$R'_1 - R_1$ はベクトル $(x, z-z_0)$ の (X_1, Z_1) 方向への射影になっている．よろしい．同様にして $R'_2 = R + R^{-1}\{-X_1x + Z_1(z-z_0)\}$．また，問題に与えられた式から

$$\delta\theta = \frac{2}{R^2\sqrt{1-\alpha^2}}\{(1+\alpha)X_1x - (1-\alpha)Z_1(z-z_0)\}.$$

右辺は $(2/R^2)\{Z_1x - X_1(z-z_0)\}$ に等しく，$R^2\delta\theta/2$ が $\boldsymbol{R}_1$，$\boldsymbol{R}'_1$ のつくる平行四辺形の面積に等しいという式を与える．よろしい．$\boldsymbol{R}_1$ と $\boldsymbol{R}_2$ のなす角を θ とすれば $\cos(\theta/2) = \sqrt{(1+\alpha)/2}$，　$\sin(\theta/2) = \sqrt{(1-\alpha)/2}$．また分子の重心が動かないことから，水素と酸素の原子の質量を m，M として $z_0 = -(2m/M)z$．よって

$$(R'_1 - R)^2 + (R'_2 - R)^2 = (1-\alpha)x^2 + (1+\alpha)\left(1+\frac{2m}{M}\right)^2 z^2$$

$$(\delta\theta)^2 = \frac{2}{R^2}\left\{\sqrt{1+\alpha}\,x - \sqrt{1-\alpha^2}\left(1+\frac{2m}{M}\right)z\right\}^2$$

分子の振動のラグランジアンの A_1 モードの部分は

$$L_{\mathrm{A}_1} = m\dot{x}^2 + \left(1+\frac{2m}{M}\right)m\dot{z}^2 - \frac{k}{2}\left\{(1-\alpha)x^2 + (1+\alpha)\left(1+\frac{2m}{M}\right)^2 z^2\right\}$$
$$-\frac{b}{R^2}\left\{\sqrt{1+\alpha}\,x - \sqrt{1-\alpha^2}\left(1+\frac{2m}{M}\right)z\right\}^2$$

すなわち

$$L_{\mathrm{A}_1} = m\dot{x}^2 + \left(1+\frac{2m}{M}\right)m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxz + Cz^2),$$

ここに，$A := k(1-\alpha) + \dfrac{b}{R^2}(1+\alpha)$，$B := -\dfrac{2b}{R^2}\sqrt{1-\alpha^2}\left(1+\dfrac{2m}{M}\right)$，

$$C := \left\{k(1+\alpha) + \frac{b}{R^2}(1-\alpha)\right\}\left(1+\frac{2m}{M}\right)^2.$$

そこで $x\sqrt{m} := \xi$, $z\sqrt{\left(1+\dfrac{2m}{M}\right)m} := \zeta$ とおいて

$$L_{A_1} = \dot{\xi}^2 + \dot{\zeta}^2 - \frac{1}{2}(A'\xi^2 + 2B'\xi\zeta + C'\zeta^2),$$

と書き直し，ξ, ζ の 2 次形式を直交変換で対角化する．こうして対称性 A_1 に属する 2 つの振動モードが得られる(図 2.4)．B_1 モードの解析は省略．

2.12 p.79–80 の分子軌道関数を用いて $\mathcal{H}^{(0)} := \sum_{\mu=1}^{6} \mathcal{H}_\mu^{(0)}$ の期待値をつくる．まず

$$\varepsilon(A_{2u}) := \langle u(A_{2u}), \mathcal{H}_\mu^{(0)} u(A_{2u}) \rangle = \frac{1}{6}(\langle \phi_1, \mathcal{H}_\mu^{(0)}\phi_1\rangle + \langle \phi_1, \mathcal{H}_\mu^{(0)}\phi_2\rangle + \langle \phi_2, \mathcal{H}_\mu^{(0)}\phi_1\rangle + \cdots)$$

は $\alpha+2\beta$ になる．このようにして π 電子の準位

	A_{2u}	E_{1g}	E_{2u}	B_{2g}
縮退度	1	2	2	1
ε	$\alpha+2\beta$	$\alpha+\beta$	$\alpha-\beta$	$\alpha-2\beta$

が得られる．これらの準位に電子を配置してベンゼンのエネルギーが定まる．

2.13 d 状態の波動関数は回転群の既約表現をつくる．水素原子のハミルトニアンがもっていた回転対称性は摂動が加わって正四面体の対称性に落ちる．正四面体群は回転群の部分群であるから d 状態の波動関数は正四面体群の表現もなすが，その表現は既約でない．これを既約表現に分解すると，その各々がエネルギー準位に対応する．

正四面体群の指標は次の問題に与えられている．d 状態の波動関数がつくる既約表現の指標をもとめよう．直交系として球関数から示唆される $3z^2-(x^2+y^2+z^2)$, x^2-y^2, xy, yz, xz をとろう．z-軸まわりの角 θ の回転で $x \to x\cos\theta + y\sin\theta$, $y \to -x\sin\theta + y\cos\theta$ となるから $x^2-y^2 \to (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(x^2-y^2)\cdots$ となる．指標を求めるためなら … の部分を知る必要はない．変換行列の対角成分だけ知れば足りる．それを表にすれば

	$3z^2-r^2$	x^2-y^2	xy	xz	yz
変換行列の対角成分	1	$\cos^2\theta-\sin^2\theta$	$\cos^2\theta-\sin^2\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$

表現の指標，すなわち表現行列の対角成分の和は $\chi_2(\theta) = 1+2(\cos\theta+\cos 2\theta)$ となる(後の定理 6.12 を参照)．これを正四面体群の指標に並べて書くと

	e	$3C_2$	$4C_3$	$4C_3^2$
回転角 θ	0	π	$2\pi/3$	$4\pi/3$
A	1	1	1	1
E_1	1	1	ω	ω^2
E_2	1	1	ω^2	ω
T	3	-1	0	0
$\chi_2(\theta)$	5	1	-1	-1

明らかに $\chi_2(\theta)=\chi_{E_1}(\theta)+\chi_{E_1}(\theta)+\chi_T(\theta)$ が各 θ で成り立つ．よって，d 状態による回転群の表現は正四面体群の E$_1$, E$_2$, T 表現に簡約される．はじめの二つは 1 次元，最後の一つは 3 次元表現なので，エネルギー準位は 1 重 + 1 重 + 3 重に分裂する．

2.14 正四面体の相対する辺のそれぞれの中点を結ぶ直線のまわりの角 π の回転を b，頂点と底面の中点を結ぶ直線のまわりの角 $2\pi/3$ の回転を c とすれば，正四面体群はこれらから生成される．$b^2=c^3=(bc)^3=e$．共役類は $\{e\},\{b,cbc^2,c^2bc\}=3C_2,\{c,bc,cb,c^2bc^2\}=4C_3,\{c^2,c^2b,bc^2,cbc\}=4C_3^2$ の四つ．したがって，既約表現は四つあり，それらの次元 n_k は $n_1^2+n_2+n_3^2+n_4^2=12$ をみたす．その解は $n_1=n_2=n_3=1$, $n_4=3$ である．1 次元の表現は数 b,c で $b^2=c^3=(bc)^3=1$ をみたすもので与えられる．よって $b=1$, $c=1,\omega,\omega^2$．これから指標表の上の行が得られる．3 次元表現の指標は e に対して 3，残りは指標の直交性からきまる．

2.15 立方体の中心に原点をおき，面に垂直に x-, y-, z-軸をとる．x-軸のまわりに座標系を角 ϕ だけ回転すると $\alpha'_{kl}=\sum_{i,j=1}^{3}R_{ki}\alpha_{ij}R^t{}_{jl}$ に変わる．すなわち

$$\alpha'=\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

となり，$\alpha'_{11}=\alpha_{11}\cos^2\phi+\alpha_{22}\sin^2\phi+\alpha_{12}\sin 2\phi$，$\alpha'_{12}=\alpha_{12}\cos^2\phi-\alpha_{21}\sin^2\phi-(1/2)(\alpha_{11}-\alpha_{22})\sin 2\phi,;\alpha'_{21}=\alpha_{21}\cos^2\phi-\alpha_{12}\sin^2\phi-(1/2)(\alpha_{11}-\alpha_{22})\sin 2\phi$，特に $\phi=\pi/2$ とすれば $\alpha'_{11}=\alpha_{22}$，$\alpha'_{12}=-\alpha_{21}$，$\alpha'_{21}=-\alpha_{12}$．他方，この回転で立方体は自身に重なるので $\alpha'=\alpha$．よって，$\alpha_{11}=\alpha_{22},;\alpha_{12}=-\alpha_{21}$．対称行列の仮定から $\alpha_{12}=\alpha_{21}=0$．

2.16 板の面密度を $\rho(\boldsymbol{r})$ とすれば，慣性モーメント・テンソル (I_{kl}) は $I_{kl}=$

$\int(r^2\delta_{kl}-x_kx_l)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}$ で定義され，対称である．座標系を回転して $\boldsymbol{r}'=R(\phi)\boldsymbol{r}$ とすれば(p.31)，$I'_{ij}=\sum_{k,l=1}^{2}R_{ik}I_{kl}R^{\mathrm{t}}{}_{lj}$ に変わる．すなわち

$$I'=\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{11} & I_{12}\\ I_{21} & I_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}$$

となり，$I'_{11}=I_{11}\cos^2\phi+I_{22}\sin^2\phi+I_{12}\sin 2\phi$,　$I'_{12}=I_{12}\cos 2\phi-\dfrac{1}{2}(I_{11}-I_{22})\sin 2\phi$. $\phi=2\pi/3$ とすると，$I'_{11}=\dfrac{1}{4}I_{11}+\dfrac{3}{4}I_{22}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}I_{12}$, $I'_{12}=-\dfrac{1}{2}I_{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}(I_{11}-I_{22})$. ところが正三角形の板は角 $2\pi/3$ の回転で不変だから $I'_{11}=I_{11}$, $I'_{12}=I_{12}$ でなければならない．よって，$I_{11}=I_{22}$, $I_{12}=0$.

2.17　(i) $P\Theta_k=\sum_h v_{hk}(P)\Theta_h$. (ii) (i) で，左辺 $=\varepsilon_P\sum_h\Psi_h\Theta_h$ と書いて右辺と比べ，$\varepsilon_P\Psi_h=\sum_k(P\Psi_k)v_{hk}(P)$. 行列 v のユニタリ性を用いる．(iii) (ii) の u_{hj} による書きかえ．(iv) Ψ_{mk} の規格化因子を除いて計算する．置換 P' をかけて $P'\Psi_{mk}=\sum_P u_{mk}(P^{-1})P'P\Psi^0$ とし，$P'P=Q$ とおけば，右辺$=\sum_Q u_{mk}(Q^{-1}P')Q\Psi^0$. v が表現であること $v_{mk}(Q^{-1}P')=\sum_h v_{mh}(Q^{-1})v_{hk}(P')$ を u に書きかえ $P'\Psi_{mk}=\sum_h u_{hk}(P')\sum_Q u_{mk}(Q^{-1})Q\Psi^0$. (v) $\phi_1(\boldsymbol{r}),\cdots,\phi(\boldsymbol{r})$ の直交性から異なる P の $P\Psi^0$ は独立．(vi) $\hat{\mathcal{H}}$ が電子のスピンを含まないので，スピン関数の直交性から $\langle\Phi_{m,S',M'_S},\hat{\mathcal{H}}\Phi_{n,S,M_S}\rangle=\delta_{S'S}\delta_{M'_S,M_S}\cdot\dfrac{1}{n!}\sum_k\sum_P\sum_Q\overline{u_{mk}}(P^{-1})u_{nk}(Q^{-1})\langle P\Psi^0,\hat{\mathcal{H}}Q\Psi^0\rangle$. ハミルトニアンは P 不変だから最後の因子は $\langle Q^{-1}P\Psi^0,\hat{\mathcal{H}}\Psi^0\rangle$ に等しい．これを $H(Q^{-1}P)$ とおけば

$$\langle\Phi_{m,S',M'_S},\hat{\mathcal{H}}\Phi_{n,S,M_S}\rangle=\delta_{S'S}\delta_{M'_S,M_S}\cdot\frac{1}{n!}\sum_k\sum_P\sum_Q\overline{u_{mk}}(P^{-1})u_{nk}(Q^{-1})H(Q^{-1}P).$$

$Q^{-1}P=R$ とおけば $P^{-1}=R^{-1}Q^{-1}$ であり，$u_{mk}(R^{-1}Q^{-1})=\sum_h u_{mh}(R^{-1})u_{hk}(Q^{-1})$ と u のユニタリ性から $\sum_k\overline{u_{hk}}(Q^{-1})u_{nk}(Q^{-1})=\delta_{hn}$. Q について総和すると $n!$ 倍になり，結局，$\langle\Phi_{m,S',M'_S},\hat{\mathcal{H}}\Phi_{n,S,M_S}\rangle=\delta_{S'S}\delta_{M'_S,M_S}\cdot\sum_R u_{nm}(R)H(R)$.

ハミルトニアンが1体部分 $\hat{\mathcal{H}}_1$ と2体部分 $\mathcal{H}_2$ からなる場合，$H(R)$ への前者の寄与は $R=E$ (恒等置換) のときのみ 0 でなく $H_1(E)=\delta_{mn}\sum_l\langle\phi_l,\hat{\mathcal{H}}_\infty\phi_l\rangle$. 後者の寄与は $R=E$ と $R=T$ (互換，transposition) からくる：あらゆるペア (i,j) にわたる和として，$H_2(E)=\delta_{mn}\sum_{(i,j)}\langle\phi_i\phi_j,\hat{\mathcal{H}}_2\phi_i\phi_j\rangle$，および $H_2(T)=\sum_{(i,j)}u_{nm}(i,j)\langle\phi_j\phi_i,\hat{\mathcal{H}}_2\phi_i\phi_j\rangle$.

第3章

3.1　Euclid 空間 R^n においては，R^n 自身と空集合 ϕ の二つ．

3.2 $c\in(a,b)$ とする．$\delta:=\min(c-a,b-c)$ とおけば，$(a,b)\subset(c-\delta,c+\delta)\subset \mathsf{R}^1$ となるので，(a,b) は R^1 において開集合．どんな正数 ε に対しても，開円板 $(x-c)^2+y^2<\varepsilon^2$ は (a,b) に属さない R^2 の点を含むので，(a,b) は R^2 においては開集合でない．$[a,b]$ が R^1 において閉集合なことは明らか．R^1 は R^2 において閉集合なので，定理 3.10 により $[a,b]$ は R^2 においても閉集合である．

3.3 $\mathsf{M}(n,\mathsf{R})$ の元のうち逆をもつものの全体は，$\mathrm{GL}(n,\mathsf{R})$ にほかならない．行列 $X\in \mathsf{M}(n,\mathsf{R})$ にその行列式を対応させる写像を det で表わせば，これは連続写像であり，$\mathrm{GL}(n,\mathsf{R})=\det^{-1}(\mathsf{R}-\{0\})$ が成り立つ．後は定理 3.9 と定理 3.10 を利用せよ．

3.4 (i) つねに $\mathsf{F}\subset\overline{\mathsf{F}}$ なので，$\mathsf{E}\subset\mathsf{F}$ ならば，$\mathsf{E}\subset\overline{\mathsf{F}}$．そして $\overline{\mathsf{F}}$ は閉集合であって $\overline{\mathsf{E}}$ は E を含む最小の閉集合なので，$\overline{\mathsf{E}}\subset\overline{\mathsf{F}}$．(ii) $\mathsf{E}\subset\mathsf{E}\cup\mathsf{F}$, $\mathsf{F}\subset\mathsf{E}\cup\mathsf{F}$ であるから (i) より $\overline{\mathsf{E}}\subset\overline{\mathsf{E}\cup\mathsf{F}}$, $\overline{\mathsf{F}}\subset\overline{\mathsf{E}\cup\mathsf{F}}$．故に $\overline{\mathsf{E}}\cup\overline{\mathsf{F}}\subset\overline{\mathsf{E}\cup\mathsf{F}}$．次に $\mathsf{E}\subset\overline{\mathsf{E}}$, $\mathsf{F}\subset\overline{\mathsf{F}}$ であるから $\mathsf{E}\cup\mathsf{F}\subset\overline{\mathsf{E}}\cup\overline{\mathsf{F}}$ が成り立つ．そして $\overline{\mathsf{E}}$ も $\overline{\mathsf{F}}$ も閉集合であるから，定理 3.4 より $\overline{\mathsf{E}}\cup\overline{\mathsf{F}}$ は閉集合であり，$\overline{\mathsf{E}\cup\mathsf{F}}$ は $\mathsf{E}\cup\mathsf{F}$ を含む最小の閉集合である．$\therefore\overline{\mathsf{E}\cup\mathsf{F}}\subset\overline{\mathsf{E}}\cup\overline{\mathsf{F}}$．よって $\overline{\mathsf{E}\cup\mathsf{F}}=\overline{\mathsf{E}}\cup\overline{\mathsf{F}}$ を得る．

3.5 (i) $\mathsf{E}^{\mathrm{i}}\subset\mathsf{E}$ は自明．E^{i} が開集合であることをいうには，$a\in\mathsf{E}^{\mathrm{i}}$ ならば a が E^{i} の内点であることをいえばよい．$a\in\mathsf{E}^{\mathrm{i}}$ は $\exists\delta>0$: $B(a,\delta)\subset\mathsf{E}$ を意味するが，実は $B(a,\delta)\subset\mathsf{E}^{\mathrm{i}}$ となることを示せ．次に G を E に含まれる任意の開集合とするとき，$\mathsf{G}\subset\mathsf{E}^{\mathrm{i}}$ を示せ．(ii) $a\in(\mathsf{E}^{\mathrm{i}})^{\mathrm{c}}\Longleftrightarrow a\notin\mathsf{E}^{\mathrm{i}}\Longleftrightarrow\forall\delta>0$: $B(a,\delta)\not\subset\mathsf{E}\Longleftrightarrow\forall\delta>0$: $B(a,\delta)\cap\mathsf{E}^{\mathrm{c}}\neq\emptyset\Longleftrightarrow a\in\overline{\mathsf{E}^{\mathrm{c}}}$．(iii) (ii) と問題 3.4 の (ii) を用いよ．(iv) (ii) と定理 3.7 を用いよ．

3.6 (i) $\boldsymbol{x}\in\overline{\mathsf{E}}\Longleftrightarrow\forall\delta>0$: $B(\boldsymbol{x},\delta)\cap\mathsf{E}\neq\emptyset\Longleftrightarrow\forall\delta>0$, $\exists\boldsymbol{y}\in\mathsf{E}$: $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta\Longleftrightarrow d(\boldsymbol{x},\mathsf{E})=0$. (ii) $|d(\boldsymbol{x},\mathsf{E})-d(\boldsymbol{y},\mathsf{E})|\leqq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を導け．(iii) $\mathsf{E}\cap\mathsf{F}=\emptyset$ よりつねに $d(\boldsymbol{x},\mathsf{E})+d(\boldsymbol{x},\mathsf{F})>0$ となるので，$f(\boldsymbol{x})=\dfrac{d(\boldsymbol{x},\mathsf{E})}{d(\boldsymbol{x},\mathsf{E})+d(\boldsymbol{x},\mathsf{F})}$ とおけ．

3.7 E をコンパクトとする．$d(\mathsf{E},\mathsf{F})=\inf\{d(\boldsymbol{x},\mathsf{F});\,\boldsymbol{x}\in\mathsf{E}\}$ に注意する．$d(\boldsymbol{x},\mathsf{F})$ は連続関数で E はコンパクトなので，E 上で最小値をとる．その値をとる点を $\boldsymbol{x}_0$ とすれば，$\boldsymbol{x}_0\notin\mathsf{F}$ なので $d(\boldsymbol{x}_0,\mathsf{F})>0$．故に $d(\mathsf{E},\mathsf{F})>0$．

3.8 a,b を S の異なる任意の 2 点とする．これらは X の 2 点でもあるから，$a\in\mathsf{G}$, $b\in\mathsf{H}$ かつ $\mathsf{G}\cap\mathsf{H}=\emptyset$ をみたす開集合 G,H が存在する．このとき $\mathsf{G}\cap\mathsf{S}$ と $\mathsf{H}\cap\mathsf{S}$ が a と b を分離する S における開集合となっている．

3.9 E を R^1 の空でない任意の集合として，E が連結なことと区間であることの同値性を示す．E が 1 点からなる集合の場合は自明であるから，E は少なくとも 2 点

を含むとする．初めに E が連結ならば区間であることをいう．対偶を示す．E が区間でないならば，$\exists a, b \in \mathsf{E}$, $\exists c \in \mathsf{R}^1$: $c \notin \mathsf{E}$ かつ $a<c<b$. そこで $\mathsf{A}_1 := \mathsf{E} \cap (-\infty, c)$, $\mathsf{A}_2 := \mathsf{E} \cap (c, +\infty)$ とおけば，これらは共に空でなく，E における開集合であって $\mathsf{E} = \mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2$ かつ $\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 = \emptyset$. よって E は連結でない．次に E は区間であって連結でないと仮定して矛盾を導く．共に空でない，E における開集合 $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2$ が存在して $\mathsf{E} = \mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2$ かつ $\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 = \emptyset$ となる．R^1 における開集合 $\mathsf{O}_1, \mathsf{O}_2$ を用いて $\mathsf{A}_1 = \mathsf{E} \cap \mathsf{O}_1$, $\mathsf{A}_2 = \mathsf{E} \cap \mathsf{O}_2$ と表わし，$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2$ からそれぞれ 2 点 a, b を取り出しておく．$a<b$ と仮定しても一般性を失わない．ここで $c := \sup(\mathsf{O}_1 \cap [a, b])$ とおく．明らかに $a \leqq c \leqq b$ なので，E が区間であることより，$c \in \mathsf{E}$. したがって $c \in \mathsf{A}_1$ または $c \in \mathsf{A}_2$ のどちらかが成り立つ．どちらの場合にも矛盾が生じることを導け．

3.10　S^1 の基本群は無限巡回群で Z に同形．S^n $(n \geqq 2)$ は単連結．

3.11　$\mathsf{T}^2 \simeq \mathsf{S}^1 \times \mathsf{S}^1$.

3.12　略．

3.13　定理 3.28 と問題 3.9 により $f(\mathsf{E})$ が区間であることを用いよ．

3.14　集合 $A := \left\{ \left(x, \sin \dfrac{1}{x} \right); 0 < x \leqq 1 \right\}$ は区間 (0,1] の，連続写像 $x \mapsto \left(x, \sin \dfrac{1}{x} \right)$ による像であるから，定理 3.28 によって連結である．次に任意の $y \in [-1, 1]$ に対して，$x_n := (\sin^{-1} y + 2\pi n)^{-1}$ とおけば，$(x_n, y) \in A$ であって $\lim_{n\to\infty} (x_n, y) = (0, y)$. $\therefore \overline{A} = \mathsf{E}$. 故に定理 3.26 より E は連結である．しかし原点 (0,0) と点 $\left(x_0, \sin \dfrac{1}{x_0} \right)$ $(0 < x_0 < 1)$ とは E 内の径路では結べない．(森田紀一，『位相空間論』，岩波書店 (1981)，参照．)

第 4 章

4.1　$\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \cup A_0 \cdot \mathrm{SO}(n)$. 2 番目の連結成分は，点，直線，平面に関する対称移動(鏡映，反転)および回転から生成される変換からなる．

4.2　O(3, 1) の単位元を含む連結成分を L_0 とし，

$$A_1 := \begin{pmatrix} -1 & & & O \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ O & & & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ O & & & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} -1 & & & O \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ O & & & -1 \end{pmatrix}$$

とおけば，他の三つの連結成分は $A_1 \cdot L_0$, $A_2 \cdot L_0$, $A_3 \cdot L_0$ である．L_0 は

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A \in \mathrm{SO}(3))$$

の形の行列と

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\tau & \sinh\tau \\ 0 & 0 & \sinh\tau & \cosh\tau \end{pmatrix}$$

の形の行列から生成される.

4.3 略.

4.4 (i) ユニタリ行列 $U := \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$ を用いて, $f(X) := UXU^\dagger$ $(\forall X \in \mathrm{SU}(1,1))$ によって定義される写像 $f\colon \mathrm{SU}(1,1) \to \mathrm{SL}(2,\mathsf{R})$ が同形写像であることを示せ.

(ii) $\mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{Sp}(2n,\mathsf{R})$ の任意の元 X は, $A^{\mathrm{t}}A + B^{\mathrm{t}}B = E$, $A^{\mathrm{t}}B = B^{\mathrm{t}}A$ をみたす行列 $A, B \in \mathsf{M}(n,\mathsf{R})$ によって, $X = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ と表わされ, 上の 2 条件は $A + \mathrm{i}B \in \mathrm{U}(n)$ に同値である. そこで $f(X) := A + \mathrm{i}B$ によって写像 $f\colon \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{Sp}(2n,\mathsf{R}) \to \mathrm{U}(n)$ を定義し, これが同形写像であることを示せ.

4.5 補題「行列 $A \in \mathsf{M}(n,\mathsf{K})$ が

$$I_\varepsilon := \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & O \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad (\varepsilon_i = \pm 1)$$

の形のすべての行列と可換ならば, A は対角行列となること ($n \geqq 3$ のときは $\det(I_\varepsilon) = 1$ としてもよい), そして対角行列が

$$J:=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & O \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \begin{array}{|cc|} \hline 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ \hline \end{array} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ O & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

の形のすべての行列と可換ならば，単位行列のスカラー倍となること」を利用する．文献 [29] による．

4.6 GL (n,C) が行列と列ベクトルの積の意味で X に作用する位相変換群であることは明白．$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ を X の相異なる二つの元とする．$\boldsymbol{x}$ を最後に含む C^n の基底 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{x}$ を選び，各列ベクトルを列とする行列 A を作る．明らかに $A\in \mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$, $A\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{x}$ が成り立つ．同様にして，$B\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{y}$ をみたす行列 $B\in\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$ を作ることができる．$(AB^{-1})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_n$, $AB^{-1}\in\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$ が成り立つので，GL (n,C) は推移的に作用している．次に $A\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_n$ をみたす行列 $A\in\mathrm{GL}(n,\mathsf{C})$ の一般形は

$$A=\begin{pmatrix} & A' & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ * & \cdots & * & 1 \end{pmatrix},\quad A'\in\mathrm{GL}(n-1,\mathsf{C})$$

であることに注意せよ．

4.7 写像 $\varphi\colon \mathsf{G}\to\mathsf{X}\times\mathsf{H}$, $\psi\colon \mathsf{X}\times\mathsf{H}\to\mathsf{G}$ を $\varphi(g):=(f(g),[s(f(g))]^{-1}g)$ $(\forall g\in\mathsf{G})$, $\psi(x,h):=s(x)h$ $(\forall x\in\mathsf{X},\ \forall h\in\mathsf{H})$ によって定義すれば，どちらも連続で $\varphi\circ\psi=I_{\mathsf{X}\times\mathsf{H}}$, $\psi\circ\varphi=I_{\mathsf{G}}$ をみたすので $\mathsf{G}\simeq\mathsf{X}\times\mathsf{H}$.

4.8 $A=\begin{pmatrix} C & x \\ y^{\mathrm{t}} & a\end{pmatrix}$ と書いておく．x,y は 2 次元列ベクトル，a は実数で，いま固有 Lorentz 群を考えているから $a>0$ である．固有 Lorentz 群の条件 $A^{\mathrm{t}}I_{3,1}A=I_{3,1}$ から

$$C^{\mathrm{t}}C-yy^{\mathrm{t}}=I_3,\quad C^{\mathrm{t}}x-ay=0,\quad x^{\mathrm{t}}x-a^2=-1 \tag{1}$$

が成り立つ．この A に対して $A=\tilde{R}B(t)\tilde{S}$ を満足する R,S,t の存在をいえばよ

い．この式を変形して

$$\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = B(t) \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満足するのでもよい．これを列ベクトル $e_4=(0001)^t$ に作用させれば，必要条件

$$\begin{pmatrix} R^{-1}x \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} \tag{2}$$

がでる．そこで，R と a を次式が成り立つように選ぶ：

$$\cosh t = a, \quad R^{-1}x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sinh t \end{pmatrix}, \quad R \in \mathrm{SO}(3). \tag{3}$$

これは可能である．なぜなら，(1) の最後の式から $a^2=1+x^t x \geq 1$ がでるが $a>0$ だったから $a\geq 1$ となり $a=\cosh t$ となる t は存在する．また，同じく (1) の最後の式から

$$x^t x = a^2-1 = \cosh^2 t-1 = \sinh^2 t$$

となるから (2) の第 2 式をみたす SO(3) の元 R^{-1} も存在する．

$T:=B(-t)\tilde{R}^{-1}A$ とおけば T は固有 Lorentz 群に属する．しかも，これは e_4 を不変にする．実際

$$Te_4 = B(-t)\tilde{R}^{-1}Ae_4 = B(-t)\begin{pmatrix} R^{-1}x \\ a \end{pmatrix} = e_4$$

となる．最後の等式は (3) による．e_4 を不変にする固有 Lorentz 群の元は SO(3) に属する．

4.9 (1) 略，(2) 略，(3) 略，(4) $\rho(U(\alpha)) = \cos\alpha J_1+\sin\alpha J_2$,
$\rho(U(\alpha))J_2 = -\sin\alpha J_1+\cos\alpha J_2,\quad \rho(U(\alpha))J_3 = J_3,\quad \rho(U(\alpha))J_4 = J_4.$

$\rho(V(\alpha))J_1 = J_1,\ \rho(V(\alpha))J_2 = \cos\alpha J_2+\sin\alpha J_3,$
$\rho(V(\alpha))J_3 = -\sin\alpha J_2+\cos\alpha J_3,\quad \rho(V(\alpha))J_4 = J_4.$

$\rho(W(\alpha))J_1 = \cosh\alpha J_1+\sin\alpha J_4,\ \rho(W(\alpha))J_2 = J_2,\quad \rho(W(\alpha))J_3 = J_3,$
$\rho(W(\alpha))J_4 = \sinh\alpha J_1+\cosh\alpha J_4.$

SO(3) の任意の元は，Euler の角を考えれば第 3 軸のまわりの回転と第 1 軸のまわりの回転の積で表わせる．$\mathrm{O}(3,1)_0$ の任意の元は，問題 4.8 により SO(3) の元と Lorentz boost の積で表わせる．したがって，$\mathrm{Im}(\rho) = \mathrm{O}(3,1)_0$ である．

(5)　準同形定理による.

第5章

5.1　(i) 略.

(ii)

$$\|\exp A-\exp B\| \leqq \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\|A^m-B^m\| \leqq \sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}\|A-B\| \leqq \mathrm{e}^a\|A-B\|.$$

(iii)

$$\begin{aligned}\|\log A-\log B\| &\leqq \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m}\|(A-I)^m-(B-I)^m\| \\ &\leqq \sum_{m=1}^{\infty}b^{m-1}\|A-B\| \leqq \frac{1}{1-b}\|A-B\|.\end{aligned}$$

(iv) 二つの級数

$$\sum_{m=1}^{q}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(\sum_{l=0}^{p}\frac{1}{l!}A^l\right)^m-A \quad \cdots\cdots ①$$

$$\sum_{m=0}^{q}\frac{1}{m!}\left(\sum_{l=1}^{p}\frac{(-1)^{l-1}}{l}(A-I)^l\right)^m-A \quad \cdots\cdots ②$$

において，初めに $p\to\infty$ とし次に $q\to\infty$ としたときの極限値が 0 になることをいえばよい．r を任意の自然数として，$p,q\geqq r$ のときは，それぞれ ① および ② における A および $(A-I)$ の r 次以下のベキの係数はすべて消え，r より高いベキの係数を評価することによって，① および ② のノルムは $r\to\infty$ のとき 0 に収束することが示せる．文献 [17] 参照.

5.2　(i) t の十分小さい範囲で，$Z(t):=\log[\exp(tA)\exp(tB)]$ は t の解析関数である．$Z(0)=0$ であるから

$$Z(t)=tZ_1+\frac{t^2}{2}Z_2+O(t^3) \quad \cdots\cdots ①$$

と展開される．よって

$$\exp[Z(t)]=I+tZ_1+\frac{t^2}{2}(Z_1^2+Z_2)+O(t^3) \quad \cdots\cdots ②$$

を得る．一方

$$\begin{aligned}\exp[Z(t)] &= \exp[tX]\exp[tY] \\ &= \left(I+tX+\frac{t^2}{2}X^2+O(t^3)\right)\left(I+tY+\frac{t^2}{2}Y^2+O(t^3)\right)\end{aligned}$$

$$= I + t(X+Y) + \frac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + O(t^3) \quad \cdots ③$$

が成り立つので，② 式と ③ 式との t の係数を比較することによって，$Z_1 = X + Y$，$Z_2 = X^2 + 2XY + Y^2 - Z_1^2 = [X, Y]$ を得る．これらを ① 式に代入すればよい．

(ii) ③ 式より

$$\begin{aligned}
&\exp[tX]\exp[tY]\exp[-tX]\exp[-tY] \\
&= \left(I + t(X+Y) + \frac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + O(t^3)\right) \\
&\quad \times \left(I - t(X+Y) + \frac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + O(t^3)\right) \\
&= I + t^2[X, Y] + O(t^3)
\end{aligned}$$

を得るので $\log[\exp[tX]\exp[tY]\exp[-tX]\exp[-tY]] = t^2[X, Y] + O(t^3)$ が成り立つ．

5.3 (i) $F(t) := \mathrm{e}^{tA}B\mathrm{e}^{-tA}$ は t の解析関数である．そして

$$F(0) = B, \quad F'(t) = A\mathrm{e}^{tA}B\mathrm{e}^{-tA} - \mathrm{e}^{tA}B\mathrm{e}^{-tA}A = \mathrm{ad}(A)F(t)$$

が成り立ち，帰納的に $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}F(t) = (\mathrm{ad}(A))^k F(t)$ を証明することができる．よって

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \left[\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}F(t)\right]_{t=0} = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{ad}(A)}B.$$

(ii) $F(t) := \mathrm{e}^{-tA}\mathrm{e}^{t(A+B)}$ とおけば，$F'(t) = \mathrm{e}^{-tA}B\mathrm{e}^{t(A+B)}$，$F(0) = I$ に注意．

(iii)
$$G(s, t) := e^{-sF(t)}\frac{\partial}{\partial t}e^{sF(t)}$$

により 2 変数の行列値関数を定義する．これは s に関して解析的で，t に関しては C^∞ 級である．

$$\frac{\partial G}{\partial s} = e^{-sF(T)}\left[\frac{\partial}{\partial t}F(t) - F(t)\frac{\partial}{\partial t}\right]e^{sF(t)}$$

から，これが $e^{-sF(t)}F'(t)e^{sF(t)}$ に等しいことが分かり，(i) により

$$\frac{\partial G}{\partial s} = e^{-s\mathrm{ad}(F(t))}F'(t)$$

が得られる．よって

$$\frac{\partial^n G}{\partial s^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}e^{-s\mathrm{ad}(F(t))}F'(t) = \left\{-\mathrm{ad}\Big(F(t)\Big)\right\}^{n-1}e^{-s\mathrm{ad}(F(t))}F'(t)$$

となり，$G(0, t) = 0$ だから

$$G(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\left\{-\mathrm{ad}\Big(F(t)\Big)\right\}^{n-1}F'(t)$$

となる．$s=1$ とおけば問題の式 $\frac{d}{dt}e^{F(t)}=e^{F(t)}\varphi\Big(-\mathrm{ad}(F(t))\Big)F'(t)$ に到達する．

5.4 問題の等式は

$$e^{tA}e^{tB}e^{-(t^2/2)[A,B]} = e^{t(A+B)} \tag{1}$$

で $t=1$ とおいたものと同値であるから，これを証明する．左辺を t で微分して得る各項のうち，$e^{tA}B$ は $e^{tA}Be^{-tA}\cdot e^{tA}$ と書いて

$$\frac{d}{dt}e^{tA}Be^{-tA} = e^{tA}[A,B]e^{-tA} = [A,B]$$

から $e^{tA}B=\Big\{B+[A,B]t\Big\}e^{tA}$ となることに注意すれば，(1) の左辺は右辺と同じ 1 階の微分方程式をみたすことが分かる．初期条件($t=0$)も同じだから，(左辺)＝(右辺)．

5.5 $F(t)=\log(e^Ae^{tB})$ $(0\le t\le 1)$ により行列値関数 F を定義する．$\mathrm{M}(n,\mathsf{K})$ の任意の元 X に対して

$$e^{\mathrm{ad}(F(t))}X = e^{F(t)}Xe^{-F(t)} = e^Ae^{tB}Xe^{-tB}e^{-A} = e^{\mathrm{ad}(A)}e^{t\,\mathrm{ad}(B)}X$$

が成り立つので

$$e^{\mathrm{ad}(F(t))} = e^{\mathrm{ad}(A)}e^{t\,\mathrm{ad}(B)}. \tag{1}$$

他方，$\frac{d}{dt}e^{F(t)}=e^Ae^{tB}B$ は問題 5.3 の (iii) により $e^{F(t)}\varphi\Big(-\mathrm{ad}(F(t))\Big)F'(t)$ とも書けるので

$$\varphi\Big(-\mathrm{ad}(F(t))\Big)F'(t) = B. \tag{2}$$

$\psi(z)\varphi(-\log z)=1$ が成り立つので，z に $e^{\mathrm{ad}(A)}e^{t\,\mathrm{ad}(B)}$ を代入して φ の部分には (1) を適用すれば

$$\psi(e^{\mathrm{ad}(A)}e^{t\,\mathrm{ad}(B)})\,\varphi\Big(-\mathrm{ad}(F(t))\Big) = 1 \tag{3}$$

となる．これは $\varphi\Big(-\mathrm{ad}(F(t))\Big)$ が正則線形変換であることを示すので，(2) から

$$F'(t) = \psi(e^{\mathrm{ad}(A)}e^{t\,\mathrm{ad}(B)})B$$

となる．$F(0)=A$ に注意して積分すれば問題の公式が得られる．

5.6 $X=\mathrm{ad}(A)$, $Y=\mathrm{ad}(B)$ とおいて $\psi(e^Xe^{tY})$ を X, Y の 3 次の項まで級数展開する．

$$e^Xe^{tY} = I+X+tY+tXY+\frac{1}{2}(X^2+t^2Y^2)+\frac{1}{2}(tX^2Y+t^2XY^2)+\frac{1}{3!}(X^3+t^3Y^3)$$

から

$$\psi(e^Xe^{tY}) = I+\frac{1}{2}\Big\{X+tY+tXY+\frac{1}{2}(X^2+t^2Y^2)$$

$$+\frac{1}{2}(tX^2Y+t^2XY^2)+\frac{1}{3!}(X^3+t^3Y^3)\Big\}$$

$$-\frac{1}{6}\Big\{X+tY+tXY+\frac{1}{2}(X^2+t^2Y^2)\Big\}^2+\frac{1}{12}(X+tY)^3$$

となるが，$\psi(e^Xe^{tY})B$ では ψ の各項のうち最右側に Y をもつものは 0 になるから

$$\psi(e^Xe^{tY})B=\Big[I+\frac{1}{2}\Big\{X+\frac{1}{2}X^2\Big\}+\frac{1}{6}X^3-\frac{1}{6}\Big\{X^2+X^3+t\Big(YX+XYX$$
$$+\frac{1}{2}YX^2\Big)+\frac{1}{2}t^2Y^2X\Big\}+\frac{1}{12}\Big\{X^3+t(YX^2+XYX)+t^2Y^2X\Big\}\Big]B.$$

これを積分すると，かなりの相殺がおこって

$$\int_0^1\psi(e^Xe^{tY})Bdt=\Big(I+\frac{1}{2}X+\frac{1}{12}X^2-\frac{1}{12}YX-\frac{1}{24}XYX\Big)B$$

となる．X, Y を $\mathrm{ad}(A), \mathrm{ad}(B)$ に戻せば，問題の公式が得られる

$[A,B]$ が A,B と可換ならば，この公式は問題 5.4 の公式を与えるが，こちらは A,B につき 4 次までしか正しくないはずであった．

5.7 任意の行列 A は相似変換 $P^{-1}AP$ により三角行列に直せるから対角行列 D とベキ零行列 A の和に書ける．D の対角線上には固有値 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ が並び，それらの縮退度が最大 d なら $N^d=0$ である．したがって

$$P^{-1}f(A)P=f(D)+f'(D)N+\cdots+\frac{1}{(d-1)!}f^{(d-1)}(D)N^{d-1}$$

が成り立つ．

5.8 $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$ とすれば $\det X=-(a^2+bc)$．$X^2=(a^2+bc)I_2$，$X^3=(a^2+bc)X$．後は e^X の定義に従って計算せよ．

5.9 公式 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ を用いて，外積が Jacobi の恒等式をみたすことを検証せよ．R^3 の標準基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ $(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3)$ を用いて，$-L_1',-L_2',-L_3'$ をそれぞれ $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ に対応させる写像を φ とせよ．式 (5.21) を参照．

5.10 略．

5.11 (i) ベキ零性と線形性は明らか．Jacobi の恒等式 $\{A,\{B,C\}\}+\{B,\{C,A\}\}+\{C,\{A,B\}\}=0$ を証明するには，微分を実行して生ずる各項には A,B,C のどれかの 2 階導関数が含まれるはずであることに注意する．そこで，A の 2 階導関数を見よう．それは $\{A,\{B,C\}\}$ にはない．

$$\{B,\{C,A\}\}=\frac{\partial B}{\partial q}\left(\frac{\partial C}{\partial q}\frac{\partial^2A}{\partial^2p}-\frac{\partial C}{\partial p}\frac{\partial^2A}{\partial p\partial q}\right)-\frac{\partial B}{\partial p}\left(\frac{\partial C}{\partial q}\frac{\partial^2A}{\partial q\partial p}-\frac{\partial C}{\partial p}\frac{\partial^2A}{\partial q^2}\right)+\cdots$$

$\cdots$ は C の 2 階導関数を含む項である．これを見ると，$\{B,\{C,A\}\}-\{C,\{B,A\}\}$

のなかで A の 2 階導関数は打ち消しあう．Jacobi の恒等式の左辺には A の 2 階導関数はない．同様に B, C の 2 階導関数もないから，左辺 $=0$ である．

(ii) $X(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{\mathrm{d}^n X(t)}{\mathrm{d}t^n}\right|_{t=0} t^n$. ところが，

$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}=-[H, X(t)],\ \frac{\mathrm{d}^2 X(t)}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[H, X(t)]=[H,[H,X(t)]],\ \cdots$ だから

$X(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}[H,[H,\cdots[H,X(t)]\cdots]]\Big|_{t=0} t^n=\mathrm{e}^{-t\mathrm{ad}(H)}X(0)$.

(iii) (a) $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=[p,H]=-\frac{\partial H}{\partial q}=-\kappa,\ \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=[q,H]=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m}$.

よって，$p(t)=-\kappa t+p_0,\ q(t)=-\frac{\kappa}{2}t^2+\frac{p_0}{m}t+q_0$.

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}=\mathcal{H}\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$. ここに，$\mathcal{H}:=\begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ 1/m & 0 \end{pmatrix}$. したがって，

$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}=\mathrm{e}^{\mathcal{H}t}\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$. ところが，$\mathcal{H}^2=\begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ 1/m & 0 \end{pmatrix}^2=-\frac{\kappa}{m}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから

$$\mathrm{e}^{\mathcal{H}t}=I+\mathcal{H}t-\frac{1}{2!}\frac{\kappa t^2}{m}I-\frac{1}{3!}\frac{\kappa t^3}{m}\mathcal{H}+\cdots=\begin{pmatrix} \cos\omega t & -\frac{\kappa}{\omega}\sin\omega t \\ \frac{1}{m\omega}\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}.$$

第 6 章

6.1 (i) 略．

(ii)
$$(S(g')(S(g)\psi))(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}(S(g)\psi)(x-a')$$
$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha'+\alpha+\alpha a')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k'+k)x}\psi(x-a'-a)=(S(g'g)\psi)(x).$$

(iii) G の Lie 代数は

$$X=\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (x,y,z\in\mathsf{R})$$

の形の行列全体からなる．

$$\exp[tX]=\begin{pmatrix} 1 & tx & tz+\frac{t^2}{2}xy \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in\mathrm{G}$$

に注意せよ．(iv) $\Big(S(\exp[tX_a])\psi\Big)(x)=\psi(x-t)$，$\Big(S(\exp[tX_k])\psi\Big)(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\psi(x)$，

$\Big(S(\exp[tX_a])\,\psi\Big)(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\psi(x)$ に注意せよ.

6.2 (i)

$$\psi(\exp[-tL_1']\boldsymbol{r}) = \psi(x_1, x_2\cos t - x_3\sin t,\ x_2\sin t + x_3\cos t),$$
$$\psi(\exp[-tL_2']\boldsymbol{r}) = \psi(x_1\cos t + x_3\sin t,\ x_2, -x_1\sin t + x_3\cos t),$$
$$\psi(\exp[-tL_3']\boldsymbol{r}) = \psi(x_1\cos t - x_3\sin t,\ x_1\sin t + x_2\cos t, x_3)$$

であるから,

$$(\mathrm{d}T(L_1')\psi)(\boldsymbol{r}) = \left[\frac{\partial\psi}{\partial x_2}(-x_2\sin t - x_3\cos t) + \frac{\partial\psi}{\partial x_3}(x_2\cos t - x_3\sin t)\right]_{t=0}$$
$$= x_2\frac{\partial\psi}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial\psi}{\partial x_2}.$$

残りも同様. (ii) 略.

6.3 (i), (ii) 略. (iii) $\rho(H)u=\lambda u$, $\rho(E)u\neq 0$ をみたすベクトル u と $\rho(H)v=\lambda v$, $\rho(F)v\neq 0$ をみたすベクトル u, v は存在し(§6.5 参照), $\rho(H)(\rho(E)u)=\rho(E)(\rho(H)u)+2\rho(E)u=(\lambda+2)\rho(E)u$, $\rho(H)(\rho(F)v)=\rho(F)(\rho(H)v)-2\rho(F)v=(\lambda-2)\rho(F)v$. (iv) ψ を, 3 変数 x_1, x_2, x_3 の, l 次の同次多項式とするとき, $\rho(L_k')\psi$ $(k=1,2,3)$ も l 次の同次多項式となること, および $\Delta(\rho(L_k')\psi)=\rho(L_k')(\Delta\psi)$ が成り立つことを示せ. (v)

$$\rho(E) = -\mathrm{i}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$\rho(F) = -\mathrm{i}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right) - \left(x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\bar{\xi}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

を用いよ. (vi) スカラー倍を除いて ξ^l のみ. (vii) 略. (viii)

$$\rho(H)\mathcal{Y}_{l,m} = 2m\mathcal{Y}_{l,m},$$
$$\rho(F)\mathcal{Y}_{l,m} = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,\mathcal{Y}_{l,m-1},$$
$$\rho(E)\mathcal{Y}_{l,m} = \sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,\mathcal{Y}_{l,m+1}.$$

(ix) $\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi):=\psi(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$, $\hat{\psi}(\theta,\varphi):=\tilde{\psi}(1,\theta,\varphi)$ によって関数 $\tilde{\psi}, \hat{\psi}$ を定義する.

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\varphi} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}(-r\sin\theta\sin\varphi) + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} r\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} r\cos\theta\sin\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial x_3}(-r\sin\theta)$$

であるから，

$$\sin\varphi\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\varphi} + \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta} = x_3\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial\psi}{\partial x_3}$$

が得られる．

$$\therefore \rho(L'_1)\psi = -r^l\left(\sin\varphi\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\varphi} + \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}\right).$$

(x) H_l から H'_l への写像 F を $F(\psi) := \psi|_{S^2}$ $(\forall\psi\in\mathsf{H}_l)$ によって定義すれば，$\psi(tx_1, tx_2, tx_3) = t^l\psi(x_1, x_2, x_3)$ $(\forall t>0)$ が成り立つので，F は全単射線形である．そして $\sigma(X)\circ F = F\circ\rho(X)$ $(\forall X\in\mathfrak{so}(3))$ が成り立つ．

6.4 (i) 略．(ii) $C_l(\exp(tS'_3)) = D'_l(R_3(-t))$ であるから，

$$D'_l(R_3(-t))\psi(x,y,z) = (x\cos t - y\sin t + \mathrm{i}x\sin t + \mathrm{i}y\cos y)^l$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}lt}\psi(x,y,z)$$

故に $\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_l(\exp(tS'_3))\psi\right]_{t=0} = \mathrm{i}l\psi$．$\therefore (-\mathrm{i})\mathrm{d}C_l(S'_3)\psi = l\psi$．(iii) 略．(iv) 略．

6.5 S^2 の1点

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

が SO(3) の元 a によって点

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta'\cos\varphi' \\ \sin\theta'\sin\varphi' \\ \cos\theta' \end{pmatrix}$$

に移るとしたとき，$\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi' = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ が成り立つことを示せばよい．

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \mathrm{i}^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}.$$

6.6 (i) $[\rho(L'_1),\rho(L'_2)] = -\rho(L'_3)$, $[\rho(L'_2),\rho(L'_3)] = -\rho(L'_1)$, $[\rho(L'_3),\rho(L'_1)] = -\rho(L'_2)$ を利用する．(ii) 表現 (ρ,H_l) は既約であるから，(i) と Schur の補題によって $\rho(L'^2)\psi = c\psi$ $(\exists c\in\mathbf{C},\ \forall\psi\in\mathsf{H}_l)$ が成り立つ．特に $\psi_l(x_1,x_2,x_3) := (x_1+\mathrm{i}x_2)^l$ に対して

$$\rho(L_1')^2\psi_l = -\mathrm{i}lx_2(x_1+\mathrm{i}x_2)^{l-1} - l(l-1)x_3^2(x_1+\mathrm{i}x_2)^{l-2}$$
$$\rho(L_2')^2\psi_l = -lx_1(x_1+\mathrm{i}x_2)^{l-1} + l(l-1)x_3^2(x_1+\mathrm{i}x_2)^{l-2}$$
$$\rho(L_3')^2\psi_l = -l^2(x_1+\mathrm{i}x_2)^l$$

が成り立つので，$\rho(L')^2\psi_l = l(l+1)\psi_l$ が得られる．よって $c=l(l+1)$ でなければならない．(iii) 単位球面上では，問題 6.3 により

$$\rho(L_1') = -\left(\sin\varphi + \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$
$$\rho(L_2') = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \rho(L_3') = \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

と表わされることを利用せよ．

6.7 例 6.1 にならえ．

$$I_R(f) = \int_{T(n,\mathrm{R})} f(x)\frac{\mathrm{d}x_{11}\mathrm{d}x_{12}\cdots\mathrm{d}x_{1n}\mathrm{d}x_{22}\cdots\mathrm{d}x_{2n}\cdots\mathrm{d}x_{nn}}{|x_{11}x_{22}^2\cdots x_{nn}^n|}.$$

6.8 (i) e^{imx} $(m\in\mathrm{Z})$ は $S^1=\mathrm{U}(1)$ の既約ユニタリ表現の代表系をなすので，$\hat{f}(m) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-imx}\mathrm{d}x$．(ii) U_λ の行列要素を u_{ij}^λ $(i,j=1,\cdots,d(\lambda))$ とすれば，$\hat{f}(\lambda)_{ij} = \displaystyle\int_G f(x)u_{ij}^\lambda(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x) = (f, u_{ji}^\lambda)$．$\therefore \mathrm{tr}(\hat{f}(\lambda)\mathrm{U}_\lambda) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{d(\lambda)}(f,u_{ij}^\lambda)u_{ij}^\lambda$．後は Peter–Weyl の定理による．(iii) $f(x) = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(m)\mathrm{e}^{imx}$．

6.9 略．

第7章

7.1 定理 5.1 の (iv) を用いて，

$$\exp[tX]\exp[sY]\exp[-tX] = \exp(s\exp[tX]Y\exp[-tX])$$

を得るが，演習問題 5.4 の (i) より $\exp[tX]Y\exp[-tX] = \exp[t\,\mathrm{ad}(X)]Y$ が成り立つので，

$$\exp[tX]\exp[sY]\exp[-tX] = \exp(s\exp[t\,\mathrm{ad}(X)]Y) \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

を得る．以下，$\forall X\in\mathfrak{g}$, $\forall Y\in\mathfrak{h}$ とする．

(i) $\exp[tX]\in\mathsf{G}$, $\exp[sY]\in\mathsf{H}$ なので，H が G の正規部分群ならば，$(*)$ の左辺が，したがって右辺が H に属する．これが任意の s に対して成り立つのだから，$\exp[t\,\mathrm{ad}(X)]Y\in\mathfrak{h}$．故に $[X,Y] = \mathrm{ad}(X)Y = \lim_{t\to0}\dfrac{1}{t}\{\exp[t\,\mathrm{ad}(X)]Y - Y\}\in\mathfrak{h}$．よって $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．(ii) $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルならば，$\mathrm{ad}(X)Y\in\mathfrak{h}$，したがってまた $(\mathrm{ad}(X))^mY\in\mathfrak{h}$，よって $\displaystyle\sum_{m=0}^{p}\frac{1}{m!}[\mathrm{ad}(X)]^mY\in\mathfrak{h}$．ここで $p\to\infty$ とすれば，

$\exp[\mathrm{ad}(X)]Y \in \mathfrak{h}$. 故に $(*)$ によって $\exp[X]\exp[Y]\exp[-X] \in \mathrm{H}$ となる．さて H における単位元のある近傍 V をとれば，V の任意の元 v は $v = \exp Y$ ($\exists Y \in \mathrm{H}$) と表わすことができ，H は連結なので定理 4.22 によって H の任意の元 a は V のある有限個の元 $v_1, \cdots, v_m$ によって $a = v_1 \cdots v_m$ と表わすことができる．よって $\exp[X]a\exp[-X] \in \mathrm{H}$ が成り立つ．同様にして G も連結なので，G の任意の元 x に対して $xax^{-1} \in \mathrm{H}$ が成り立つことがわかる．故に H は G の正規部分群である．

7.2 略.

7.3 $B(X, Y) = \mathrm{tr}\{\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)\}$ であるから $\mathfrak{g}$ における線形変換 $\tau := \mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)$ の，$\{E_i\}$ および $\{F_\mu\}$ に関する行列表示をそれぞれ $A = (a^i_j)$，$A' = (b^\mu_\nu)$ とすると，$\tau(E_j) = \sum_{i=1}^{n} a^i_j E_i \tau(F_\nu) = \sum_{\mu=1}^{n} b^\mu_\nu F_\mu$. そして $A' = SAS^{-1}$ を得るので，$\mathrm{tr}(A') = \mathrm{tr}(A)$.

7.4 (i) 式 (7.22) と定理 7.9 の (iv) を用いよ.

(ii) $$\mathrm{tr}\{\mathrm{ad}(H_\alpha)|_{\mathfrak{a}}\} = -\alpha(H_\alpha) + \sum_{n=1}^{p} n\alpha(H_\alpha)d_n = (\alpha, \alpha)\left(-1 + \sum_{n=1}^{p} nd_n\right)$$

ここに $d_n := \dim(\mathfrak{g}_{n\alpha})$，他方 $\mathrm{ad}(H_\alpha)|_{\mathfrak{a}} = [\mathrm{ad}(E_\alpha)|_{\mathfrak{a}}, \mathrm{ad}(E_{-\alpha})|_{\mathfrak{a}}]$ だから $\mathrm{tr}\{\mathrm{ad}(H_\alpha)|_{\mathfrak{a}}\} = 0$. 故に $(\alpha, \alpha) \neq 0$ を用いて，$d_1 = 1$，$d_2 = \cdots = d_p = 0$ が得られる．よって $2\alpha, 3\alpha, \cdots$ はルートでない．α の代りに $-\alpha$ を考察することによって，$-2\alpha, -3\alpha, \cdots$ もルートでないことがわかる．

7.5 略.

7.6 $\mathfrak{su}(2)$ は SU(2) の Lie 代数である．その交換関係は (4.25) から $[S_1, S_2] = -S_3$，$[S_2, S_3] = -S_1$，$[S_3, S_1] = -S_2$. ここでは物理に引きつけて $J_k = -iS_k$ の表現をつくろう．交換関係は $[J_1, J_2] = iJ_3$，$[J_2, J_3] = iJ_1$，$[J_3, J_1] = iJ_2$ となる．Cartan 部分代数は J_k のどれか 1 つからなる．いま，それを J_3 にとり H_3 と書く．ルートもウェイトも 1 次元ベクトルとなる．

(4.25) の行列の $-\mathrm{i}$ 倍が 2 次元表現を与えている：

$$J_1^{(1/2)} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J_2^{(1/2)} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\ H_3^{(1/2)} = J_3^{(1/2)} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

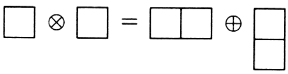
肩符 1/2 の意味は，すぐ下に説明する．J_3 の固有ベクトルは $|\uparrow\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$|\downarrow\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で，それぞれの固有値 1/2，$-1/2$ がこの表現の最大，最小ウェイトである．J_k の肩符は，この最大ウェイトであって，$\mathrm{D}^{(1/2)}$ のように表現をラヴェルする．

$\mathrm{D}^{(1/2)}$ の直積を調べよう．$J_3 = J_3^{(1/2)} \otimes I + I \otimes J_3^{(1/2)}$ に可能な最高ウェイトは 1 で，固有ベクトルは $|1\rangle^{(1)} := |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$ である．$E_\pm^{(1/2)} := J_1^{(1/2)} \pm iJ_2^{(1/2)}$ とおけば $[H_3^{(1/2)},$

$E_{\pm}^{(1/2)}]=\pm E_{\pm}^{(1/2)}$ となる(Cartan の標準基底)．それらの直積により $E_{-}|\uparrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle=|\downarrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle+|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$ となる．これは H_3 の固有値 0 の固有ベクトルになっている．これを規格化して $|0\rangle^{(1)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle+|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle)$ とおけば，$E_{-}|1\rangle^{(1)}=\sqrt{2}|0\rangle^{(1)}$．そして，$E_{-}|0\rangle^{(1)}=|\downarrow\rangle\otimes|\downarrow\rangle:=|-1\rangle^{(1)}$．この表現のウェイトは最大が 1 で，0, -1 と続く．ここで $J_1=(E_{+}+E_{-})/2$ などにもどれば

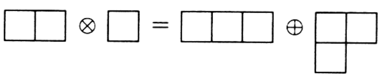
$$J_1^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad J_2^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad J_3^{(1)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

これが最高ウェイト 1 の表現を与える．考えている直積空間には上記の $|m\rangle^{(1)}$ $(m=0,\pm1)$ のどれにも直交するベクトル $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle+|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle)$ がある．これは恒等表現を与える．こうして，$\dfrac{1}{2}$-表現二つの直積は $\mathrm{D}^{(1/2)}\otimes\mathrm{D}^{(1/2)}=\mathrm{D}^{(1)}\oplus\mathrm{D}^{(0)}$ のように簡約された．Young の図形でいえば



となる．縦にならんだ二つの箱は恒等表現に帰する．横に並んだ n 個の箱は最高ウェイト $n/2$ の表現を表わす．

さらに $\mathrm{D}^{(1/2)}$ を直積すると，Young の図形は



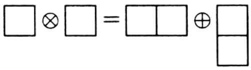
となり，最高ウェイト 3/2 と 1/2 の表現が現われる．上と同様の計算により

$$J_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}&0&0\\\sqrt{3}&0&2&0\\0&2&0&\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{3}&0\end{pmatrix},\quad J_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-\sqrt{3}\mathrm{i}&0&0\\\sqrt{3}\mathrm{i}&0&-2\mathrm{i}&0\\0&2\mathrm{i}&0&-\sqrt{3}\mathrm{i}\\0&0&\sqrt{3}\mathrm{i}&0\end{pmatrix},$$

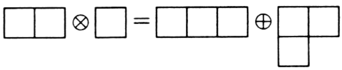
$$J_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}.$$

7.7 $\rho_8(H_1)$, $\rho_8(H_2)$ は (7.87) 式で与えられる基底で対角化され，それらの固有値はすでに表 7.9 に計算されている．$\rho_8(E_{\pm i})$ $(i=1,2,3)$ の作用は，表 7.6 と表 7.8 によって求められる．

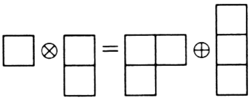
7.8 Young の図形で示す．



$$D^3(1,0)\otimes D^3(1,0)=D^6(2,0)\oplus D^3(0,1)$$



$$D^6(2,0)\otimes D^3(1,0)=D^{10}(3,0)\oplus D^8(1,1)$$



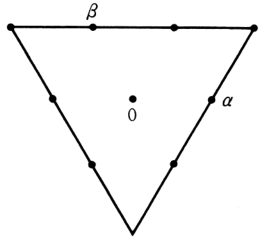
$$D^3(0,1)\otimes D^3(1,0)=D^1(0,0)\oplus D^8(1,1)$$

表現 $D^s(m_1,m_2)$ の次元は Weyl の次元数公式 $N=\dfrac{1}{2}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)$ によって計算する (p. 210 および表 7.3 を参照)．

7.9 10 次元表現 $D^{10}(3,0)$ の最高ウェイトは $\omega=2\alpha+\beta$．ここにルート α,β は $(\alpha,\beta)=-\dfrac{1}{2}$, $\|\alpha\|=\|\beta\|=1$ の関係式をみたす．ウェイトを求める図式は下の通り．

$$\begin{array}{ccccccc}
\omega & \rightarrow & \omega-\alpha & \rightarrow & \omega-2\alpha & \rightarrow & \omega-3\alpha\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
 & & \omega-\alpha-\beta & \rightarrow & \omega-2\alpha-\beta & \rightarrow & \omega-3\alpha-\beta\\
 & & & & \downarrow & & \downarrow\\
 & & & & \omega-2\alpha-2\beta & \rightarrow & \omega-3\alpha-2\beta\\
 & & & & & & \downarrow\\
 & & & & & & \omega-3\alpha-3\beta
\end{array}$$

これを図示すれば



となる．中心点は零ウェイトを表わし，中心点から他の点へ引かれた矢印のベクトルが当該ウェイトを表わす．

7.10 (i) (7.93) 式において $f=f_j,\ v=v_i$ とおけば

$$\text{左辺} = (A^{\mathrm{t}} f_j)(v_i) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj} f_k\right)(v_i) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\delta_{ki} = b_{ij}$$

$$\text{右辺} = f_j(Av_i) = f_j\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\delta_{jk} = a_{ji}$$

(ii) (a) 略. (b) $\forall f \in \mathsf{V}',\ \forall v \in \mathsf{V} : ((AB)^{\mathrm{t}} f)(v) = f(ABv) = (A^{\mathrm{t}} f)(Bv) = ((B^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}) f)(v)$. (iii) $\overline{\rho}(X)$ が X に関して線形なことは明白．$\overline{\rho}$ が交換子積を保存することは次のようにしてわかる．$\overline{\rho}([X,Y]) = -\{\rho([X,Y])\}^{\mathrm{t}} = -\{\rho(X)\rho(Y)-\rho(Y)\rho(X)\}^{\mathrm{t}} = -\{\rho(Y)\}^{\mathrm{t}}\{\rho(X)\}^{\mathrm{t}} + \{\rho(X)\}^{\mathrm{t}}\{\rho(Y)\}^{\mathrm{t}} = [\overline{\rho}(X), \overline{\rho}(Y)]$. (iv) v を V の任意の元とする．$\varphi(f) := f(v) (\forall f \in \mathsf{V}')$ によって写像 $\varphi : \mathsf{V}' \to K$ を定義すれば，明らかに φ は線形なので，$\varphi \in \mathsf{V}''$. φ は v によって定まるので，各 v にこの φ を対応させる写像を Φ とする．

$$(\Phi(v))(f) := f(v)\ (\forall v \in \mathsf{V},\ \forall f \in \mathsf{V}')$$

Φ は線形なことがわかる．そして $\dim(\mathsf{V}'') = \dim(\mathsf{V}') = \dim(\mathsf{V})$ なので Φ は全単射である．次に $\mathfrak{g}$ の任意の元 X に対して $\overline{\overline{\rho}}(X)(\Phi(v)) = \Phi(\rho(X)v)$ が示せるので，$\overline{\overline{\rho}}(X) \circ \Phi = \Phi \circ \rho(X)$ が成り立ち，したがって $\overline{\overline{\rho}} \cong \rho$. (v) $\overline{\rho}$ を既約と仮定する．V を ρ-不変な V の任意の線形部分空間とし，$\mathsf{W} := \{f \in \mathsf{V}' ; f(v) = 0,\ \forall v \in \mathsf{U}\}$ とおけば，W は V' の $\overline{\rho}$-不変な線形部分空間である．$\overline{\rho}$ が既約なので，$\mathsf{W} = \mathsf{V}'$ または $\mathsf{W} = \{0\}$. 前者から $\mathsf{U} = 0$ が，後者からは $\mathsf{U} = \mathsf{V}$ が出る．故に ρ は既約である．逆は $\rho \cong \overline{\overline{\rho}}$ より得られる．

参考　A_r 型の単純 Lie 代数の既約表現 $D^N(m_1, m_2, \cdots, m_{r-1}, m_r)$ の反傾表現は $D^N(m_r, m_{r-1}, \cdots, m_2, m_1)$ に同値である．

7.11 (i), (ii) (7.50) 式と $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = a_{ij}$ より明白．(iii) A_2 型の場合 $a_{12} = a_{21} = -1$ であるから，$q_{00} = m_1,\ q_{k0} = m_2 + k$ に注意せよ．

7.12 (i) $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm\alpha_3, \pm(\alpha_1+\alpha_2), \pm(\alpha_2+\alpha_3), \pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$. (ii) ウェイトの基本形が $\omega_1 = \dfrac{1}{4}(3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)$, $\omega_2 = \dfrac{1}{4}(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)$, $\omega_3 = \dfrac{1}{4}(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)$ で与えられることおよび定理 7.25 を用いよ. (iii) $D^{15}(1,0,1)\otimes D^{15}(1,0,1) = D^1(0,0,0) \oplus D^{15}(1,0,1)\oplus D^{15}(1,0,1)\oplus D^{20}(0,2,0)\oplus D^{45}(2,1,0)\oplus D^{45}(0,1,2)\oplus D^{84}(2,0,2)$.

7.13

$$\mathrm{K}^{*+} = \mathrm{u\bar{s}}, \quad \mathrm{K}^{*0} = \mathrm{d\bar{s}}, \quad \rho^+ = \mathrm{u\bar{d}}, \quad \rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{u\bar{u}} - \mathrm{d\bar{d}})$$

$$\mathrm{K}^{*-} = \mathrm{s\bar{u}}, \quad \overline{\mathrm{K}^{*0}} = \mathrm{s\bar{d}}, \quad \rho^- = \mathrm{d\bar{u}}$$

次に φ, ω 粒子の構成であるが，(7.84) 式における 1 次元表現の基底を φ_0 とし，8 次元表現の中の単一項を ω_0 とする：

$$\begin{cases} \varphi_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{u\bar{u}} + \mathrm{d\bar{d}} + \mathrm{s\bar{s}}) \\ \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{u\bar{u}} + \mathrm{d\bar{d}} - 2\mathrm{s\bar{s}}). \end{cases}$$

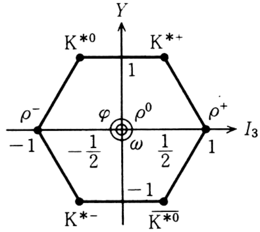
φ_0 と ω_0 の直交変換による混合とは

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0 \cos\theta - \omega_0 \sin\theta \\ \omega = \varphi_0 \sin\theta + \omega_0 \cos\theta \end{cases}$$

とすることである．ここで $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ とすれば，

$$\begin{cases} \varphi = \mathrm{s\bar{s}} \\ \omega = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{u\bar{u}} + \mathrm{d\bar{d}}) \end{cases}$$

となる．φ_0 と ω_0 では実際の φ, ω の振舞を表現することができないのである．こうしてベクトル中間子は $D^8(1,1)\oplus D^1(0,0)$ の 9 次元可約空間の基底で記述することになり，既約表現の基底で記述するという一般要請を破ることになるが，ベクトル中間子族は 9 重項をなすとされ，$\mathfrak{su}(3)$ 対称性の破れの一つを表わすと考えられている (下図参照)．



ベクトル中間子族の 9 重項

7.14 (i) 行列 X^2E_{ij} の kl-要素は，$(X^2E_{ij})_{kl}=(X^2)_{ki}\delta_{jl}$ で行列にすれば $\sum_{kl}(X^2)_{ki}\delta_{jl}E_{kl}=\sum_k(X^2)_{ki}E_{kj}$ となる．k はダミーで l と書いてもよい．同様にして $X^2E_{ij}+E_{ij}X^2=\sum_l\{(X^2)_{li}E_{lj}+(X^2)_{jl}E_{il}\}$．したがって

$$X^2E_{ij}+E_{ij}X^2-(i\leftrightarrow j)=\sum_l\{(X^2)_{li}E_{lj}+(X^2)_{jl}E_{il}-(X^2)_{lj}E_{li}-(X^2)_{il}E_{jl}\}$$

行列 X は反対称なので X^2 は対称だから右辺は $\sum_l(X^2)_{li}(E_{lj}-E_{jl})-(X^2)_{lj}(E_{li}-E_{il})$ に等しい．$(XE_{ij}X)_{lm}=x_{li}x_{jm}$ などを行列にして

$$X(E_{ij}-E_{ji})X=\sum_{lm}(x_{li}x_{jm}-x_{lj}x_{im})E_{lm}=\sum_{lm}x_{il}x_{jm}(E_{ml}-E_{lm}).$$

ただし，X が反対称なことを用いダミー添字をつけかえた．

(ii) $u_{ij}=E_{ij}-E_{ji}$ $(i>j)$ が基底になる．$Z=\sum_{i>j}z_{ij}u_{ij}$ とおく．
$K:=X^2Z+ZX^2=\sum_{i>j}z_{ij}\{X^2(E_{ij}-E_{ji})+(E_{ij}-E_{ji})X^2\}$ は
$K=\sum_{i>j}\sum_l\left\{z_{ij}\{(X^2)_{li}u_{lj}-(X^2)_{lj}u_{li}\}\right\}=\sum_{i>j}\sum_{l,m}\left\{z_{ij}\{(X^2)_{li}\delta_{mj}-(X^2)_{lj}\delta_{mi}\}\right\}u_{lm}$.
u_{lm} は反対称だから $K=\sum_{i>j}\sum_{l>m}z_{ij}\{(X^2)_{li}\delta_{mj}-(X^2)_{lj}\delta_{mi}-(X^2)_{mi}\delta_{lj}\}+(X^2)_{mj}\delta_{li}\}$ u_{lm}．よって，問題の線形変換の係数は
$\alpha(lm|ij)=\{(X^2)_{li}\delta_{mj}-(X^2)_{mi}\delta_{lj}-(X^2)_{lj}\delta_{mi}-(X^2)_{mj}\delta_{li}\}$.
そのトレースは

$$\sum_{l>m}\alpha(l,m|l,m)=\sum_{l>m}\left\{(X^2)_{ll}-(X^2)_{ml}\delta_{lm}-(X^2)_{lm}\delta_{ml}+(X^2)_{mm}\delta_{ll}\right\}$$
$$=\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=m+1}^{n}\left\{(X^2)_{ll}+(X^2)_{mm}\right\}=(n-1)\mathrm{tr}\,X^2$$

$L:=XZX=\sum_{i>j}\sum_{l,m}z_{ij}X(E_{ij}-E_{ji})X=\sum_{i>j}\sum_{l,m}z_{ij}x_{il}x_{jm}u_{ml}$
z_{ij},u_{lm} の反対称性を考慮して $L=\sum_{i>j}\sum_{l>m}z_{ij}(x_{il}x_{jm}-x_{jl}x_{im})u_{ml}$．変換係数は
$\beta(ml|ij)=x_{il}x_{jm}-x_{jl}x_{im}$．トレースは $\sum_{l>m}\beta(ml|ml)=\sum_{l>m}(x_{ml}x_{lm}-x_{ll}x_{mm})$.

X は反対称だから対角要素 x_{ll}, x_{mm} は 0 なので

$\sum_{l>m} \beta(ml|ml) = \sum_{l>m} x_{ml}x_{lm} = \frac{1}{2}\sum_{l>m} x_{ml}x_{lm} + \sum_{m>l} x_{lm}x_{ml} = \frac{1}{2}\sum_{l,m} x_{ml}x_{lm} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, X^2.$

(iii) まず $B(X,X)$ から．$B(X,X) := \mathrm{tr}\Big(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)\Big)$ であるが，$\mathrm{ad}(Y)$ の Z への作用は $\mathrm{ad}(Y)Z = [Y,Z]$ であり，$\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(X)Z = [X,[Y,Z]] = (X^2Z + ZX^2) - (XZY + YZX)$ となる．(ii) から $\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(X) = \{(n-1)-1\}\mathrm{tr}\, X^2$.

したがって $B(X,Y) = (n-2)\mathrm{tr}\,(XY)$. これを基底 $u_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ による表示 $X = \sum_{i>j} x_{ij}u_{ij}$, $Y = \sum_{kl} y_{kl}u_{kl}$ に対して計算すれば $\mathrm{tr}\,(XY) = \sum_{i,j} x_{ij}y_{ji} = 2\sum i > j x_{ij}y_{ji}$. これが任意の Y に対して 0 となるのは $X = 0$ のとき．故に $B(X,Y)$ は非退化.

7.15 $LP = [L,P] + PL = \{\lambda(x) + P\}L$ から $LP\phi = 0$ となり，$P\phi$ は解，したがって $P^2\phi$ も解，…．$\phi(\mathrm{e}^{tP}x)$ を t で展開する.

$$\phi(\mathrm{e}^{tP}x)\Big|_{t=0} = \phi(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathrm{e}^{tP}x) = \sum_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\mathrm{e}^{tP}Px_i = \sum_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\mathrm{e}^{tP}q_i(x).$$

よって，

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathrm{e}^{tP}x)\Big|_{t=0} = \sum_i q_i(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\mathrm{e}^{tP}x) = \sum_{i,j}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\partial x_i}(\mathrm{e}^{tP}Px_j)(\mathrm{e}^{tP}q_i) + \sum_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\mathrm{e}^{tP}Pq_i(x).$$

よって，

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\mathrm{e}^{tP}x)\bigg|_{t=0} = \sum_{i,j} q_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}q_i(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}.$$

以下同様にして

$$\phi(\mathrm{e}^{tP}x) = \left\{1 + tP + \frac{1}{2!}(tP)^2 + \cdots\right\}\phi(x)$$

を得る．右辺の各項は (7.64) の解である．なお，右辺は $\mathrm{e}^{tP}\phi(x)$ とも書ける.

7.16 p.145 に定義した Poisson 括弧 $[\cdot\,,\cdot]$ により (x, y, p_x, p_y) の関数 F の時間的変化率は $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = -[H,F]$ で与えられる．よって，$\dfrac{\mathrm{d}K_l}{\mathrm{d}t} = -A_lH = 0$.

$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left(p_x\frac{\partial}{\partial p_y} - p_y\frac{\partial}{\partial p_x}\right)\right\},$

$A_2 = -\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{mk}}p_x\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{mk}\,x\frac{\partial}{\partial p_x}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{mk}}p_y\frac{\partial}{\partial y} - \sqrt{mk}\,y\frac{\partial}{\partial p_y}\right)\right\},$

$A_3 = \frac{1}{\sqrt{y}}$. 同様にして，$[A_1, A_2] = -A_3$, $[A_2, A_3] = -A_1$, $[A_3, A_1] = -A_1$.

群索引

欧文索引

和文索引

ア 行

カ 行

サ 行

タ 行

ナ 行

ハ 行

江沢 洋

1932 年生まれ.
学習院大学名誉教授.

島 和久

1934 年生まれ.
東京理科大学名誉教授.

群と表現

2009 年 5 月 27 日　第 1 刷発行

著　者　江沢洋（えざわひろし）　島和久（しまかずひさ）

発行者　山口昭男

発行所　株式会社 岩波書店
〒101-8002 東京都千代田区一ツ橋 2-5-5
電話案内 03-5210-4000
http://www.iwanami.co.jp/

印刷・精興社　製本・牧製本

ISBN 978-4-00-005270-2　Printed in Japan